الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
D'ORAN

المدرسة العليا للأساتذة
بوهران

Analyse complexe

Cours avec exercices résolus

destiné aux étudiants de la troisième année PEM et PES Mathématiques des écoles nationales supérieures, et aux étudiants de la deuxième année Licence Mathématiques

Présenté par

Dr. AITEMRAR Chafika Amel

Table des matières

Avant propos

Ce cours porte sur le calcul différentiel et intégral des fonctions complexes d'une variable complexe. Il est destiné aux étudiants de la troisième année PEM et PES Mathématiques des écoles nationales supérieures, et aux étudiants de la deuxième année Licence Mathématiques des universités.

Il peut servir comme un support pédagogique, car il contient presque tous les éléments de la théorie de l'analyse complexe, tous les théorèmes sont démontrés avec des illustrations par des exemples et des figures, en plus des exercices résolus à la fin de chaque chapitre.

Le cours comporte sept chapitres :

1. Le premier chapitre est un rappel d'historique des propriétés générales des nombres complexes.
2. Dans le deuxième chapitre on introduit les fonctions complexes d'une variable complexe, des extensions des résultats et propriétés des fonctions d'une variable réelle aux fonctions d'une variable complexe sont obtenues.
3. Le troisième chapitre concerne la notion de dérivabilité. Quoique les opérations élémentaires (somme, produit, quotient et composition) pour les fonctions d'une variable réelle restent valables pour les fonctions d'une variable complexe, nous allons voir qu'il y a une grande différence dans les propriétés dans cette notion de

dérivabilité ; une fonction d'une variable complexe, $\mathbb{C}$-dérivable sur un domaine D est de classe C^∞, et même analytique dans D, ce qui n'est pas vrai pour une fonction d'une variable réelle, $\mathbb{R}$-dérivable. Les conditions de Cauchy-Riemann feront un outil très puissant pour l'étude de la différentiabilité dans $\mathbb{C}$.

4. Le calcul intégral fait l'objet du quatrième chapitre. Les intervalles dans $\mathbb{R}$ sont remplacés par des chemins dans $\mathbb{C}$. Beaucoup de propriétés des fonctions d'une variable réelle sont transformées en fonctions d'une variable complexe. Les formules intégrales de Cauchy seront très utiles pour le calcul des intégrales curvilignes et même des intégrales réelles compliquées.

5. Dans le cinquième chapitre on fait les extensions des propriétés des séries entières (ou fonctions analytiques) réelles à celles d'une variable complexe. Le développement en série de Taylor de quelques fonctions usuelles est obtenu.

6. Le sixième chapitre consiste à étudier la notion de résidus, une notion qui est propre aux fonctions d'une variable complexe ayant des points singuliers, ces derniers peuvent être déterminés à l'aide du développement en série de Laurent. Le théorème des résidus donne une relation très pratique entre le résidu en des points singuliers et l'intégrale sur un domaine contenant ces singularités.

7. L'importance du théorème des résidus réside dans le calcul de diverses intégrales réelles un peu compliquées (comme la transformation de Fourier). Le dernier chapitre est une application du théorème des résidus, il est consacré au calcul de plusieurs types d'intégrales réelles.

Chapitre 1

L'ensemble des nombres complexes

1.1 Corps des nombres complexes

1.1.1 Introduction

Il est clair qu'il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2+1=0$.

Pour donner des solutions à cette équation et d'autres semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels contenant un élément noté i (un nombre imaginaire) solution de l'équation précédente, i.e. $i^2=-1$. On appelle cet ensemble les nombres complexes, il doit avoir la propriété d'un corps comme l'ensemble les nombres réels.

Définition 1.1.1 *Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.*

Le nombre x est appelé la partie réelle de z, on note $x=\mathrm{Re}(z)$.

Le nombre y est appelé la partie imaginaire de z, on note $y=\mathrm{Im}(z)$.

Notation : L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1.2 *a) Si $y = 0$ on dit que z est réel, et si $x = 0$ on dit que z est un nombre imaginaire pur.*

b) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

1.1.2 Opérations sur les nombres complexes

Addition : $(x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$

Soustraction : $(x + yi) - (a + bi) = (x - a) + (y - b)i$

Multiplication : $(x + yi)(a + bi) = xa + xbi + yai + ybi^2 = xa - yb + (xb + ya)\,i$

Division : si $a + bi \neq 0$, i.e. $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on a

$$\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{x + yi}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{xa + yb + (-xb + ya)\,i}{a^2 + b^2} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \frac{-xb + ya}{a^2 + b^2} i$$

1.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.1.3 *Le nombre complexe $x - iy$ est appelé le conjugué de $z = x + iy$.*

On le note $\overline{z}$.

Proposition 1.1.4 *Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :*

1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, 2) $\overline{zw} = \overline{zw}$, 3) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$, 4) $\overline{\overline{z}} = z$,

5) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, 6)$z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$.

1.1.4 Module (ou Valeur absolue)

Définition 1.1.5 *La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple 1.1.6 $|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $|i| = \sqrt{1} = 1$.

Proposition 1.1.7 *Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes.*

1) $|zw| = |z|\,|w|$, 2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$, 3) $|\overline{z}| = |z|$, 4) $|z|^2 = z\overline{z}$

5) $|z+w| \leq |z| + |w|$, 6) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Remarque 1.1.8 *On a $x^2 = |x|^2$ pour $x \in \mathbb{R}$, par contre $|z|^2 \neq z^2$ si $\operatorname{Im} z \neq 0$.*

1.2 Représentation graphique des nombres complexes

1.2.1 Plan complexe

Un nombre complexe $a+ib$ peut être considéré comme un couple ordonné (a,b) de $\mathbb{R}^2$, donc nous pouvons représenter les nombres complexes par des points du plan Oxy. On l'appelle dans ce cas plan complexe.

Ainsi nous avons une correspondance $z = a+ib \rightsquigarrow P(a,b)$ du plan.

1.2.2 Courbes dans le plan complexe

- **segment :** le segment $[z_1, z_2]$ reliant deux points z_1 et z_2 est l'ensemble des points $\{z = (1-t)\, z_1 + t z_2,\ t \in [0,1]\}$
- **Cercle :** Le cercle de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon r est défini par l'équation $|z - z_0| = r$, ou l'ensemble des points $\{z = z_0 + r(\cos t + i \sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}$
- **Courbe :** en général une courbe dans le plan complexe est un ensemble de points de la forme $z = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions réelles.

1.3 Forme polaire d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et soit $P(x, y)$ le point correspondant du plan complexe Oxy. Si on désigne par θ l'angle entre le demi-axe positif Ox et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, et si on pose $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on voit que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

D'où z peut être réécrit sous la forme dite polaire ou trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Le nombre θ est appelé l'argument de z, et noté $\arg z$.

1.3.1 Formule de De Moivre

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, on a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

En particulier si $z_1 = z_2$, on obtient pour $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$$

Par récurrence, on trouve pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^n = r^n[\cos\theta + i\sin\theta]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Cette identité est dite formule de Moivre.

1.3.2 Formule d'Euler

En utilisant le développement en série entière des fonctions $e^x, \cos x$ et $\sin x$, et en admettant le développement pour $e^{i\theta}$ on obtient $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Cette identité est dite formule d'Euler. D'où la formule de Moivre s'écrit aussi $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

1.3.3 Racines d'un nombre complexe

Définition 1.3.1 *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, et soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine $n-$ième de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$. On note $w = z^{1/n}$ ou $w = \sqrt[n]{z}$.*

Ecrivons $z = re^{i\theta}$ et $w = se^{i\alpha}$, alors d'après la formule de Moivre on a

$$\begin{aligned} w^n = z \quad &\Leftrightarrow \quad s^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \Leftrightarrow s^n = r \text{ et } n\alpha = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad s = r^{1/n} \text{ et } \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donc si $r \neq 0$ (i.e. $z \neq 0$) on remarque qu'il y a n nombres w qui vérifient $w^n = z$;

$$w_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \dots n-1$$

Exemple 1.3.2 *Calcul de $\sqrt[3]{1-i}$.*

On a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc les racines cubiques sont

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2}^{1/3} e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2^{1/6} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \\ w_1 &= 2^{1/6} e^{-i\frac{\pi}{12} + i\frac{2\pi}{3}} = 2^{1/6} e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ w_2 &= 2^{1/6} e^{-i\frac{\pi}{12} + i\frac{4\pi}{3}} = 2^{1/6} e^{i\frac{15\pi}{12}} = 2^{1/6} e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

1.4 Suites et ensembles utiles dans $\mathbb{C}$

Définition 1.4.1 *On dit qu'une suite (z_n) converge vers z et on note $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ si $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.*

Proposition 1.4.2 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

D'où les règles de calcul de limites dans $\mathbb{R}$ (somme, produit et quotient) restent valables dans $\mathbb{C}$.

Notation : Pour tout $r > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, on note

– disque ouvert de centre z_0 et de rayon r : $D_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}$.

– disque fermé de centre z_0 et de rayon r : $\overline{D}_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}$.

– disque ouvert pointé de centre z_0 et de rayon r : $\widetilde{D}_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} : 0 < |z_0 - z| < r\}$.

1.5 Exercices

1.5.1 Exercices résolus

Exercice 1.1 *Vérifier les propriétés suivantes.*

1. $\forall z \in \mathbb{C}^* : \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

2. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

3. $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z| - |w| \leq |z - w|$.

4. $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

Solution :

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{1}{|z|^2}\overline{(\overline{z})} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{\overline{z}z} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

2. Posons $z = x + iy$, alors

$$z = \overline{z} \Longleftrightarrow x + iy = x - iy \Longleftrightarrow iy = -iy \Longleftrightarrow i2y = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \Longleftrightarrow z = x \in \mathbb{R}.$$

3. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

d'où

$$|z| - |w| \leq |z - w|.$$

4. On a

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \leq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} + \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2} = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2 &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 + 2\,|\operatorname{Re} z|\,|\operatorname{Im} z| \\ &\leq (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \\ &= 2\,|z|^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

Exercice 1.2 *Montrer l'identité suivante (Identité du Parallélogramme).*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)} + (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 + |z_1|^2 + 2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \\ &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right). \end{aligned}$$

Exercice 1.3 *Soit z un nombre complexe tel que* $\operatorname{Im} z > 0$. *Montrer que*

$$\operatorname{Im} \frac{z}{1+z^2} > 0 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

Solution : Posons $z = x + iy$, on a

$$\operatorname{Im} \frac{z}{1+z^2} = \operatorname{Im} \frac{(x+iy)\,(1+x^2-y^2-i2xy)}{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} > 0,$$

si et seulement si $y\,(1 - x^2 - y^2) > 0$, i.e. $x^2 + y^2 = |z| < 1$, puisque $y > 0$.

Exercice 1.4 *En utilisant la formule de Moivre, montrer que*

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{aligned}$$

Solution : Par la formule de Moivre, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \sin 3\theta,$$

d'autre part et par la formule du binôme on a

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) \end{aligned}$$

D'où et par identification on obtient les relations demandées.

Exercice 1.5 *Calculer les limites suivantes*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{ni^n}{n+1} \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

Solution : La première limite n'existe pas : les valeurs adhérentes de cette suite sont en effet les nombres $-1, -i, 1, i$.

La deuxième limite égale 0 puisque

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Exercice 1.6 *Résoudre les équations suivantes.*

1. $(z-1)^3 - 1 = 0,$

2. $z^4 + 2 = 0,$

3. $z^5 - 1 = i.$

Solution :

1. Posons $w = z - 1$, donc l'équation devient $w^3 = 1$. Directement de la formule de la racine $n - i\grave{e}me$ d'un nombre complexe, les trois solutions $z_i = 1 + w_i$ de l'équation $(z-1)^3 - 1 = 0$ sont

$$1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},\ 1 + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \text{ et } 2.$$

2. De même, pour $z^4 + 2 = 0$, on obtient les solutions suivantes :

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$\text{et } \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Pour l'équation $z^5 - 1 = i$, on a

$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right),\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right),\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{20} + i\sin\frac{5\pi}{20}\right)$$
$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right) \text{ et } \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right).$$

1.5.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 1.7 *Montrer que les racines non réelles d'une équation polynomiale à coefficients réels se présentent par paires de nombres complexes conjugués.*

Exercice 1.8 *Soit $z \neq \pm 1$ un nombre complexe de module unité. Déterminer l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$.*

Exercice 1.9 1. *Montrer que $\cos n\theta$ peut s'exprimer comme un polynôme en $\cos\theta$,*

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta),$$

où T_n est un polynôme de degré n (le $n^{i\grave{e}me}$ polynôme de Tchebychev de première espèce). Calculer T_0, T_1 et T_2.

2. *Etablir la relation de récurrence suivante*

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1} - T_n(x).$$

Chapitre 2

Fonctions d'une variable complexe

2.1 Généralités sur les fonctions complexes

2.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 2.1.1 *On appelle fonction complexe d'une variable complexe toute correspondance d'un ensemble non vide de $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}$, qui à chaque valeur z, fait correspondre une ou plusieurs valeurs $w \in \mathbb{C}$.*

Si la valeur de w est unique, on dit que la fonction est uniforme, sinon elle est dite multiforme.

Exemple : 1) $w = f(z) = z^2$, est une fonction uniforme.

2) $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme.

Remarque 2.1.2 *Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction.*

2.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous forme, $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple 2.1.3 *La fonction $z \to z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $z \to z^2$.*

2.1.3 Transformations

Définition 2.1.4 *Si $z = x + iy$, on peut écrire $f(z)$ comme*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = w.$$

Les fonctions u et v sont appelées respectivement, partie réelle et partie imaginaire de f.

On note $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$.

On remarque que le point $P(x,y)$ dans le plan de la variable z est transformé en $P(u,v)$ du plan de la variable w. Nous dirons alors que f est une transformation dans $\mathbb{C}$.

Exemple 2.1.5 $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$, *donc*

$$u(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) \text{ et } v(x,y) = 2xy$$

2.2 Fonctions élémentaires

2.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le degré du polynôme $P(z)$ si $a_n \neq 0$.

2.2.2 Les fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes.

Le cas particulier

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $ad - bc \neq 0$ est appelé transformation homographique.

2.2.3 Les fonctions exponentielles

On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, de plus cette série entière converge aussi pour $x \in \mathbb{C}$. D'où on peut définir la fonction exponentielle par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Si $a > 0$ on définit $a^z = e^{z \log a}$.

Proposition 2.2.1 *1) si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.*

2) si $z = x + iy$, alors $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Preuve. Pour 1) on utilise la définition de la série produit, et pour 2) on identifie la série e^{iy} avec les séries de $\cos y$ de et $\sin y$. $\square$

2.2.4 Fonctions logarithmiques

La fonction $z \to f(z) = \log z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle

$$w = \log z \Leftrightarrow z = e^w.$$

En écrivant $z = |z|\, e^{i \arg z}$ et $w = u + iv$, on obtient

$$z = e^w \Leftrightarrow |z|\, e^{i \arg z} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} \Leftrightarrow |z| = e^u \text{ et } v = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi la fonction $z \to \log z$, est une fonction multiforme définie par

$$\log z = \ln |z| + i \left(\arg z + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Définition 2.2.2 *On appelle détermination principale de* $\log z$ *le choix de la valeur de* $\arg z$ *dans un intervalle de longueur* 2π. *Souvent cette détermination est définie dans* $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Exemple : $\log(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$.

Pour la détermination principale, $\log(-1) = i\pi$.

Proposition 2.2.3 *Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo* $[2\pi i]$*)*

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \quad \textit{et} \ \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2.$$

2.2.5 Fonctions trigonométriques

Par la formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, on trouve $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Par analogie, on définit les fonctions trigonométriques ou circulaires $\sin z$, $\cos z, \ldots$ par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \coth z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Remarque : 1) Contrairement au cas de la variable réelle, les fonctions de la variable complexe $z \to \sin z$ et $z \to \cos z$ ne sont pas bornées, en effet

$$\lim_{\alpha\to\infty} |\cos(i\alpha)| = \lim_{\alpha\to\infty} |\sin(i\alpha)| = \infty$$

2) La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles restent valables dans le cas complexe. Par exemple

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \ldots$$

2.2.6 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques complexes sont définies par analogie à celles du cas réel.

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tan z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\end{aligned}$$

Les propiétées suivantes peuvent être facilement vérifiées.

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1, \ldots$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes

$$\sin(iz) = i\sinh(z), \quad \cos(iz) = \cosh z, \quad \tan(iz) = i\tanh z,$$

$$\sinh(iz) = i\sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \tanh(iz) = i\tan z.$$

2.2.7 La fonction $z \to z^\alpha$

La fonction $z \to z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

Exemple : $i^{-i} = e^{-i\log i} = e^{-i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$

Remarque 2.2.4 *On a* $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}, \ \alpha \in \mathbb{C}\ , \ k \in \mathbb{Z}$, *mais* $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Par exemple*

$$\begin{aligned}\left(i^2\right)^i &= (-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i\arg(-1))} = e^{-(\pi + 2k\pi)} \\ \textit{mais} \ \ i^{2i} &= e^{2i\log i} = e^{2i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{-2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-(\pi + 4k\pi)}\end{aligned}$$

2.3 Limites et continuité

2.3.1 limite de fonctions d'une variable complexe

Soit f une fonction complexe d'une variable complexe z, définie dans un voisinage de $z = z_0$ sauf peut-être en $z = z_0$, c'est-à-dire définie dans un disque ouvert pointé en z_0.

Définition 2.3.1 *On dit que f admet une limite l (ou $f(z)$ tend vers l) quand z tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Proposition 2.3.2 *la limite si elle existe, elle est unique.*

Preuve. Elle découle du fait que $\mathbb{C}$ est un espace métrique donc séparé. □

Remarque 2.3.3 *En général, on utilise cette proposition pour montrer que la limite n'exixte pas.*

Exemple : $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas. En effet pour $z = x$ réel on a $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$, et pour $z = iy$ imaginaire pur on a $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.

Proposition 2.3.4 *Si $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $l = a + ib$, alors*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = b$$

Preuve. La preuve découle des inégalités

$$|f(z) - l| \leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b|$$

$$\max(|u(x, y) - a|, |v(x, y) - b|) \leq |f(z) - l|$$

□

Comme pour les suites, les opérations somme, produit et quotient, sur les limites des fonctions restent valables.

Limite infinie et limite à l'infini :

Définition 2.3.5 *On dit que $f(z)$ tend vers ∞ quand z tend vers z_0, et on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, si*

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > A.$$

De même on définit les limites à l'infini par

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists B > 0 : |z| > B \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0, \exists B > 0 : |z| > B \Rightarrow |f(z)| > A.$$

2.3.2 Continuité de fonctions d'une variable complexe

Définition 2.3.6 *Soit f une fonction complexe uniforme définie dans un voisinage de $z = z_0$ et en z_0. On dit que f est continue en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Elle est dite continue dans une région $D \subset \mathbb{C}$, si elle est continue en tout point de D.

Exemple : 1) Tout polynôme en z est une fonction continue sur $\mathbb{C}$.

2) Soit $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ pour $z \neq 0$, et $f(0) = 1$. Elle n'est pas continue en 0, car $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas, donc $\lim\limits_{z\to 0} f(z) \neq f(0)$.

Définition 2.3.7 *Soit f une fonction complexe uniforme définie dans un domaine D. On dit que f est uniformément continue sur D si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall z, z' \in D : |z - z'| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Exemple : La fonction $f(z) = z^2$ est uniformément continue sur tout disque $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, avec $r > 0$. En effet $\forall z, w \in D_r$, on a

$$\left|z^2 - w^2\right| = |z - w|\,|z + w| \leq |z - w|\,(|z| + |w|) \leq 2r\,|z - w|,$$

donc pour avoir $|z^2 - w^2| < \varepsilon$, il suffit qu'on ait $|z - w| < \varepsilon/2r = \delta$.

2.4 Exercices

2.4.1 Exercices résolus

Exercice 2.1 *Soit la fonction*

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Calculer u *et* v *si* $w = u + iv$ *et* $z = x + iy$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{(x+iy)^2+1}{2(x+iy)} = \frac{x^2+i2xy-y^2+1}{2(x+iy)}\frac{x-iy}{x-iy} \\ &= \frac{(x^2-y^2+1)x+2xy^2}{2(x^2+y^2)} + i\frac{+2x^2y-(x^2-y^2+1)y}{2(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

d'où

$$u = \frac{1}{2}\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} \text{ et } v = \frac{1}{2}\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}.$$

Exercice 2.2 *Montrer que*

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $e^{z+2k\pi i} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}$.
3. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Solution :

1. Posons $z_1 = x_1 + iy_1$, et $z_2 = x_2 + iy_2$, on a alors

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_2\sin y_1 + i(\cos y_1\sin y_2 + \cos y_2\sin y_1)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

2. Posons $z = x + iy$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+iy+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)} \\ &= e^{x}\left[\cos\left(y+2k\pi\right) + i\sin\left(y+2k\pi\right)\right] \\ &= e^{x}\left[\cos y + i\sin y\right] = e^{z} \end{aligned}$$

3. Comme $e^{z} = e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z\right)$, alors

$$\left|e^{z}\right| = \left|e^{\operatorname{Re} z}\left(\cos \operatorname{Im} z + i\sin \operatorname{Im} z\right)\right| = e^{\operatorname{Re} z}\left|\left(\cos \operatorname{Im} z + i\sin \operatorname{Im} z\right)\right| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Exercice 2.3 *Montrer que*

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

2. $\cos\left(z_1 + z_2\right) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

Solution :

1. Par définition on a

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{i2z} - 2 + e^{-i2z}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. De même

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{4}\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) \\ &= \cos\left(z_1 + z_2\right). \end{aligned}$$

Exercice 2.4 1. *Trouver toutes les solutions de l'équation*

$$e^z = -a, \ \ avec\ a > 0.$$

2. *Si* $ae^{is} + be^{it} = ce^{iu}$ $(a, b, c > 0)$, *exprimer* c *et* u *en terme de* a, s, b *et* t

Solution : 1. Comparant les modules dans

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = -a,$$

on obtient $e^x = |-a| = a$, donc $x = \ln a$, puis en remplaçant dans l'égalité on trouve

$$(\cos y + i \sin y) = -1,$$

ce qui entraîne

$$\cos y = -1 \text{ et } \sin y = 0,$$

d'où $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les solutions de l'équation sont de la forme

$$z = \ln a + i(2k + 1)\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. L'égalité $ae^{is} + be^{it} = ce^{iu}$ donne les relations

$$a \cos s + b \cos t = c \cos u, \ \text{ et } a \sin s + b \sin t = c \sin u.$$

En mettant les relations au carré et en faisant leur somme, on obtient

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos s \cos t + 2ab \sin s \sin t \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(s - t), \end{aligned}$$

et alors

$$c = \sqrt{a^2 + 2ab \cos(s - t) + b^2}$$

Par division dans les relations précédentes on tire

$$\tan u = \frac{a \sin s + b \sin t}{a \cos s + b \cos t} \Rightarrow u = \arctan \frac{a \sin s + b \sin t}{a \cos s + b \cos t}.$$

Exercice 2.5 *Par définition de la limite montrer que*

1. $\lim\limits_{z\to 1-i}\left(x+i\left(2x+y\right)\right)=1+i.$
2. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}=\infty.$
3. $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+1}=0.$

Solution :

1. Il s'agit de montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\left|z-(1-i)\right|<\delta\Rightarrow\left|\left(x+i\left(2x+y\right)\right)-(1+i)\right|<\varepsilon.$$

Il faut faire apparaître $\left|z-(1-i)\right|$ dans l'estimation de $\left|\left(x+i\left(2x+y\right)\right)-(1+i)\right|.$

On a $\left|z-(1-i)\right|=\left|x-1+i\left(y+1\right)\right|$, par suite

$$\begin{aligned}\left|\left(x+i\left(2x+y\right)\right)-(1+i)\right| &= \left|(x-1)+i\left(2x+y-1\right)\right|\\ &= \left|(x-1)+i\left(2x-2+y+1\right)\right|\\ &= \left|(x-1)+i2\left(x-1\right)+i\left(y+1\right)\right|\\ &= \left|(x-1)\left(1+2i\right)+i\left(y+1\right)\right|\\ &\leq 3\left|x-1\right|+\left|y+1\right|\\ &\leq 4\left|z-(1-i)\right|,\end{aligned}$$

puisque $\left|x-1\right|\leq\left|z-(1-i)\right|$ et $\left|y+1\right|\leq\left|z-(1-i)\right|.$

Donc il suffit de prendre $\delta=\varepsilon/4$, pour avoir $\left|\left(x+i\left(2x+y\right)\right)-(1+i)\right|<\varepsilon.$

2. Par définition

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}=\infty\Leftrightarrow\left[\forall A>0,\exists\delta>0:0<\left|z-1\right|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{(z-1)^3}\right|>A\right].$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(z-1)^3}\right| &> A\Leftrightarrow\left|(z-1)\right|^3<\frac{1}{A}\\ &\Leftrightarrow\ \left|(z-1)\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{A}},\end{aligned}$$

il sffit de prendre alors $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{A}}$.

3. Par définition

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2+1} = 0 \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists B > 0 : |z| > B \Rightarrow \left|\frac{1}{z^2+1}\right| < \varepsilon\right)$$

On a

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|z^2+1\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

D'autre part $||z^2| - 1| \leq |z^2+1|$, et si de plus $|z| \geq 1$, on obtient

$$\left|z^2+1\right| \geq \left|\left|z^2\right| - 1\right| = \left|z^2\right| - 1,$$

donc pour avoir $|z^2+1| > \frac{1}{\varepsilon}$, il suffit qu'on ait $|z^2| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Or

$$\left|z^2\right| - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1},$$

il suffit alors de prendre $B = \max\left(1, \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$.

Exercice 2.6 *Calculer les limites suivantes.*

$$1)\ \lim_{z\to 1+i}\left(z^2-5z+10\right),\ 2)\ \lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4},\ 3)\ \lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}.$$

Solution :

1)

$$\lim_{z\to 1+i}\left(z^2-5z+10\right) = \lim_{z\to 1+i} z^2 - \lim_{z\to 1+i} 5z + 10 = (1+i)^2 - 5(1+i) + 10 = 5-3i$$

2)

$$\lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim\limits_{z\to -2i}(2z+3)\lim\limits_{z\to -2i}(z-1)}{\lim\limits_{z\to -2i}(z^2-2z+4)} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

3)

$$\lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i} = \frac{\lim\limits_{z\to i}(3z^4-2z^3+8z^2-2z+5)}{\lim\limits_{z\to i}(z-i)} = \frac{0}{0},$$

c'est une forme indéterminée, mais on remarque que $z = i$ est racine commune de $3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5$ et $z - i$, donc par division euclidienne, on obtient

$$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = \lim_{z \to i} \left(3z^3 - (2 - 3i) z^2 + (5 - 2i) z + 5i\right) = 4 + 4i$$

Exercice 2.7 *Soit f la fonction complexe définie par*

$$f(z) = \log |z| .$$

1. *Vérifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{C}^*$.*
2. *Montrer que f est uniformément continue sur tout ensemble C_r, tel que*

$$C_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| \geq r\}, \; r > 0.$$

3. *Est-ce-que f est uniformément continue sur $\mathbb{C}^*$? Justifier.*

Solution : 1. La fonction f est continue sur $\mathbb{C}^*$, car elle est composée de deux fonctions continues

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & z & \to & |z| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} f_2 : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \to & \log t \end{array}$$

2. Dire que f est uniformément continue sur C_r, revient à démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, w \in C_r : |z - w| < \delta \Rightarrow |\log |z| - \log |w|| < \varepsilon.$$

Pour simplifier on pose $t = |z|$ et $s = |w|$, et on suppose que $t > s$. On a

$$\begin{aligned} \log t - \log s &= \log \frac{t}{s} = \log \left(\frac{t - s + s}{s} \right) = \log \left(\frac{t - s}{s} + 1 \right) \\ &\leq \frac{t - s}{s} \leq \frac{t - s}{r}, \end{aligned}$$

car $\log(1 + x) \leq x, \forall x > 0$, et $s \geq r$.

Donc pour que $|\log |z| - \log |w|| < \varepsilon$, il suffit que $\frac{t-s}{r} < \varepsilon$. Or

$$\frac{t - s}{r} < \varepsilon \Leftrightarrow t - s < \varepsilon r \Leftrightarrow ||z| - |w|| < \varepsilon r.$$

Prenons alors $\delta = \varepsilon r$, nous obtenons

$$|z-w| < \delta \Rightarrow ||z|-|w|| \leq |z-w| < \delta \Rightarrow |\log|z| - \log|w|| < \varepsilon.$$

3. f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{C}^*$, en effet on doit montrer que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists z, w \in \mathbb{C}^* : |z-w| < \delta \text{ et } |\log|z| - \log|w|| \geq \varepsilon.$$

Supposons que $|z| > |w|$, on a alors

$$\begin{aligned} |\log|z| - \log|w|| &= \log|z| - \log|w| = \log\frac{|z|}{|w|} = \log\left(1 + \frac{|z|-|w|}{|w|}\right) \\ &\geq \frac{\frac{|z|-|w|}{|w|}}{1+\frac{|z|-|w|}{|w|}} = \frac{|z|-|w|}{|z|} = 1 - \frac{|w|}{|z|}, \end{aligned}$$

car $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}, \forall x > 0$.

Donc pour tout δ, on prend $z = 2w = \delta$, on obtient alors $|z-w| = \delta/2 < \delta$ et

$$|\log|z| - \log|w|| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

2.4.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 2.8 *Montrer que*

$$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

Exercice 2.9 *Montrer que les zéros de* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont réels, et déterminer leurs valeurs.*

Exercice 2.10 *Montrer que* $\lim\limits_{z \to \infty} z^3 = \infty$.

Exercice 2.11 *Etudier la continuité et la continuité uniforme de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{z}, \ z \in \mathbb{C}^*.$$

Chapitre 3

Fonctions holomorphes

3.1 Dérivation dans le domaine complexe

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y. Cette différence apparait particulièrement dans la dérivation.

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction uniforme définie sur domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$, et soit $z_0 \in D$. On dit que f est dérivable en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et elle est finie. Dans ce cas on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle la dérivée de f au point z_0.

Remarque : Si on pose $h = z - z_0$, on aura $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$.

Définition 3.1.2 *On dit que f est holomorphe dans D, si f est dérivable en tout point z de D.*

Elle est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

Exemple : Tout polynôme est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1.3 *Si la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$, alors elle est continue au point z_0.*

Preuve. Pour tout $z_0 \in D\setminus\{z_0\}$, on a

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow \lim_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = 0 \times f'(z_0) = 0.$$

D'où f est continue en z_0. □

Remarque : La réciproque de la proposition est fausse. Par exemple $f(z) = |z|$ est continue en $z_0 = 0$, mais elle n'est pas dérivable en $z_0 = 0$. En effet

pour $h = l > 0$ on a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} = 1$, et pour $h = ik$, $k > 0$ on a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} = \frac{1}{i} \neq 1$.

3.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Proposition 3.2.1 *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction définie dans un domaine D, et soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Alors f est dérivable au point z_0, si et seulement si les fonctions u et v sont dérivables au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et vérifient les équations dites de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \tag{3.1}$$

dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{3.2}$$

Preuve. *Condition nécessaire :* Supposons f dérivable au point z_0, alors

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

en particulier pour $x \to x_0, y = y_0$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0}, \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

et de même pour $x = x_0, y \to y_0$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

D'où les dérivées partielles de u et v au point (x_0, y_0) existent et vérifient les relations (3.1).

Condition suffisante : Supposons que u et v sont dérivables au point (x_0, y_0), et vérifient les relations (3.1). Posons

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \beta = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

alors par définition de la dérivabilité en $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \\ &= \alpha h - \beta k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \\ v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) &= \beta h + \alpha k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right), \end{aligned}$$

où la notation $f = o(g)$ signifie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. D'où

$$\begin{aligned} f(z_0 + h + ik) - f(z_0) &= u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0)] \\ &= \alpha h - \beta k + i(\beta h + \alpha k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \\ &= (h + ik)(\alpha + i\beta) + o(|h + ik|), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\lim_{(h+ik)\to 0} \frac{f(z_0+h+ik)-f(z_0)}{h+ik} = (\alpha+i\beta) + \lim_{(h+ik)\to 0} \frac{o(|h+ik|)}{h+ik} = \alpha+i\beta,$$

ce qui montre que f est dérivable au point z_0, et

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

$\square$

Remarque 3.2.2 *Il se peut que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sans être dérivable en z_0.*

Exemple : Soit $f(z) = f(x+iy) = \sqrt[3]{xy}$, $z_0 = 0$.

On a $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ et $v(x,y) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

D'où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, mais la fonction f n'est pas dérivable en 0, car $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sqrt[3]{xy}}{x+iy}$ n'existe pas. En effet pour $x = y$, on a

$$\lim_{z\to 0} \left| \frac{\sqrt[3]{xy}}{x+iy} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+i)x} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|1+i|} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

Remarque 3.2.3 *1. En multipliant la deuxieme condition de Cauchy-Riemann par i et l'ajoutant à la première, on aura*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou bien $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, où $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dit opérateur de Cauchy-Riemann.

2. *Si les fonctions u et v sont deux fois dérivables et vérifient les relations* (3.1) , *alors*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

De telles fonctions sont dites harmoniques. Ainsi les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.

3.3 Règles de dérivation

3.3.1 Opérations sur la dérivée

Les règles de dérivation somme, produit, quotient et composition (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas réel.

1. $(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z)$.
2. $(f(z)\,g(z))'=f'(z)\,g(z)+f(z)\,g'(z)$.
3. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$, si $g(z)\neq 0$.
4. $(g\circ f)'(z)=f'(z)\,g'[f(z)]$.

Dérivées des fonctions élémentaires

1. $(z^n)'=nz^{n-1}$,
2. $(e^z)'=e^z$,
3. $(\log z)'=\frac{1}{z}$,
4. $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$,
5. $(\tan z)'=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\tan^2 z$.
6. $(\sinh z)'=\cosh z$, $(\cosh z)'=\sinh z$.

3.3.2 Règle de l'Hôpital

Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le ponit z_0 telles que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, et $g'(z_0) \neq 0$, alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 3.3.1 *Calculons* $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$.

Les fonctions $\sin z$ *et* z *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}$, *et* $\sin 0 = 0$, *donc par la règle de l'Hôpital, on a*

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1.$$

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

Si $w = f(z)$ est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée $f'(z)$ ou $\frac{dw}{dz}$. Si $f'(z)$ est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée $f''(z)$ ou $\frac{d^2w}{dz^2}$. Ainsi de suite, la dérivée n^{ieme} de $f(z)$ sera notée $f^{(n)}(z)$ ou $\frac{d^nw}{dz^n}$.

Théorème 3.4.1 *Si* f *est holomorphe dans un domaine* D, *alors* $f', f'', \ldots$ *sont égalemant holomorphes dans* D, *i.e. pour tout* n, *la dérivée* n^{ieme} *de* $f(z)$ *existe dans* D.

On verra la preuve de ce théorème dans la chapitre qui suit (voir section 4.4).

Remarque : On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles. Par exemple la fonction

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0, \quad \text{et } f(0) = 0,$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, en effet sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et au point 0, car

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

d'où

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \ x \neq 0, \quad \text{et } f'(0) = 0,$$

mais f' n'est pas dérivable en 0, en fait, elle n'est même pas continue en 0.

3.5 Points singuliers

Définition 3.5.1 *Un point z_0 est appelé un point singulier ou une singularité d'une fonction f, si la fonction f cesse d'être holomorphe en ce point.*

Il y a plusieurs types de singularités.

1. **Singularité isolée :** Le point z_0 est appelé point singulier isolé de f, s'il existe $\delta > 0$ tel que le disque $|z - z_0| \leq \delta$ ne contient pas d'autre points singuliers que z_0. Dans le cas contraire il est dit une singularité non isolée.

   Exemple : La fonction $z \to f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ a des singularités en $z_0 = 0$ et $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$. Les singularités $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$, sont isolées. Par contre le point $z_0 = 0$ est une singularité non isolée. En effet $\forall \delta > 0, \exists k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k\pi} < \delta$, i.e. le disque $D_\delta(0)$ contient une autre singularité $z_k \neq z_0$.

2. **Singularité apparente :** Le point z_0 est appelé une singularité apparente de f si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

   Exemple : Le point $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $z \to \frac{\sin z}{z}$, car $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

3. **Pôles :** Le point z_0 est appelé un pôle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, si $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \neq 0$. Si $n = 1$, z_0 est appelé un pôle simple, et si $n = 2$, z_0 est appelé un pôle double,...

   Exemple : La fonction $z \to f(z) = \frac{3z-1}{(z-1)^2(z+4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simple en $z = -4$.

4. **Singularité essentielle :** Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

   Exemple : La fonction $z \to f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1$.

5. **Singularités à l'infini :** La nature d'une singularité de $z \to f(z)$ en $z = \infty$ (le point à l'infini) est la même que celle de $w \to f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w = 0$.

   Exemple : La fonction $z \to f(z) = z^3$ a un pôle triple à $z = \infty$, car $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ a un pôle triple en $w = 0$.

3.6 Exercices

3.6.1 Exercices résolus

Exercice 3.1 *Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes :*

1. $w = z^3$.

2. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

3. $w = \sin z$.

Solution :

1. Pour $w = u + iv = z^3$, on a

$$u = x^3 - 3xy^2 \text{ et } v = 3x^2y - y^3,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

2. Pour $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, on a

$$u = \frac{1}{2}\frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} \text{ et } v = \frac{1}{2}\frac{x^2 y + y^3 - y}{x^2 + y^2},$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. Pour $w = \sin z$, on a

$$u = \sin x \cosh y \text{ et } v = \cos x \sinh y,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Exercice 3.2 *Déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c et d qui rendent la fonction*

$$f(z) = ax + by + i(cx + dy)$$

holomorphe.

Solution : On a $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{\partial u}{\partial y} = b, \frac{\partial v}{\partial x} = c, \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = d.$$

Les dérivées partielles existent et elles sont continues, donc pour que f soit holomorphe, il est nécessaire et suffisant que $a = d$ et que $b = -c$. Ainsi

$$f(z) = ax + -cy + i(cx + ay) = (a + ic)(x + iy) = (a + ic)z.$$

Exercice 3.3 1) *Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires :*

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta};\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

2) *Vérifier que la fonction définie pour* $\operatorname{Re} z>0$ *par* $f(z)=\ln|z|+i\arg z$, *est holomorphe.*

Solution : En utilisant les coordonnées polaires $z=re^{i\theta}$, f s'écrit

$$f(z)=\ln r+i\theta=u(r,\theta)+iv(r,\theta),$$

d'où

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0=-\frac{\partial v}{\partial r}\end{cases},$$

par conséquent f est holomorphe.

Exercice 3.4 *Soit f une fonction complexe définie par*

$$\begin{cases}e^{\frac{-1}{z^4}} & ;z\neq 0\\ 0 & ;z=0\end{cases}$$

Est-ce- que la fonction f est dérivable au point $z=0$?

Solution : La fonction f n'est pas dérivable au point $z=0$, car elle n'est pas continue en ce point. En effet, en choisissant $x=y$ i.e. $z=x+ix$, dans la limite, on obtient

$$\lim_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-1}{(x+ix)^4}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{4x^4}}=\infty.$$

Exercice 3.5 *Soit $f=u+iv$ une fonction complexe holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $u=v^2$.*

Montrer que f est constante.

Solution : Par les conditions de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ 2v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

remplaçant la première égalité dans la deuxième, on obtient

$$2v\left(2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}\Leftrightarrow\left(4v^2+1\right)\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

et comme $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, alors $f'(z)=0$. Ainsi f est constante.

Exercice 3.6 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes.*

$$1)\ f(z)=\frac{1+z}{1-z},\qquad 2)\ f(z)=\cos^2(2z+3i),\qquad 3)\ f(z)=(z+i)^z$$

Solution : 1) On a

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)'=\frac{(1+z)'(1-z)-(1+z)(1-z)'}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2}$$

2)

$$\begin{aligned}\left(\cos^2(2z+3i)\right)' &= 2\left(\cos(2z+3i)\right)'\cos(2z+3i)\\ &= 2(2z+3i)'\left(-\sin(2z+3i)\right)\cos(2z+3i)\\ &= -4\sin(2z+3i)\cos(2z+3i)\end{aligned}$$

3) En utilisant les fonctions exponentielle et logarithme, on peut écrire

$$(z+i)^z=\exp\log(z+i)^z=\exp\left(z\log(z+i)\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\left((z+i)^z\right)' &= \left(z\log(z+i)\right)'\exp\left(z\log(z+i)\right)\\ &= \left(\log(z+i)+\frac{z}{z+i}\right)(z+i)^z\\ &= (z+i)^z\log(z+i)+z(z+i)^{z-1}\end{aligned}$$

Exercice 3.7 *Trouver les limites suivantes.*

$$1)\ \lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^{6}+1},\qquad 2)\ \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^{2}}$$

Solution : 1) On a

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^{6}+1}=\frac{0}{0},$$

c'est une forme indéterminée, mais on peut utiliser la règle de l'Hôpital puisque les fonctions $z^{10}+1$ et $z^{6}+1$ sont holomorphes, donc

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^{6}+1}=\lim_{z\to i}\frac{\left(z^{10}+1\right)'}{\left(z^{6}+1\right)'}=\lim_{z\to i}\frac{10z^{9}}{6z^{5}}=\frac{10}{6}\left(i\right)^{4}=\frac{5}{3}$$

2) De même on a

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^{2}}=\frac{0}{0}$$

Comme $1-\cos z$ et z^{2} sont holomorphes, alors par la règle de l'Hôpital on obtient

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{0}{0},$$

utilisant encore une fois la règle de l'Hôpital on trouve

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2}$$

3.6.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 3.8 *Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont dérivables.*

1) $f\left(z\right)=\left|z\right|^{2}$, 2) $f\left(z\right)=z\operatorname{Re}z$,

3) $f\left(z\right)=\overline{z}$, 4) $f\left(x+iy\right)=x^{2}+iy^{2}$.

Exercice 3.9 *Montrer que*

$$1)\ \left(\sin z\right)'=\cos z,\quad 2)\ \left(\cos z\right)'=-\sin z$$

Exercice 3.10 *Calculer la limite suivante.*

$$\lim_{z\to 0}\left(\cos z\right)^{1/z^{2}}$$

Chapitre 4

Intégration dans le domaine complexe

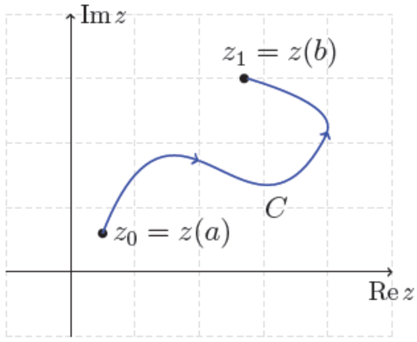
4.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

Définition 4.1.1 *On appelle chemin ou arc de classe C^1 dans $\mathbb{C}$ toute fonction de classe C^1 définie d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$ vers le plan complexe $\mathbb{C}$,*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},\ t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

Les points $z_0 = \gamma(a)$ et $z_1 = \gamma(b)$ sont appelés respectivement point initial ou origine de γ et point final ou extrémité de γ.

L'image $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ s'appelle support de γ ou courbe dans le plan complexe $\mathbb{C}$, paramétrée par le chemin γ.



Remarque : Souvent on confond le chemin γ avec la courbe C paramétrée par γ.

Définition 4.1.2 *1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, ce dernier est appelé chemin fermé ou lacet.*

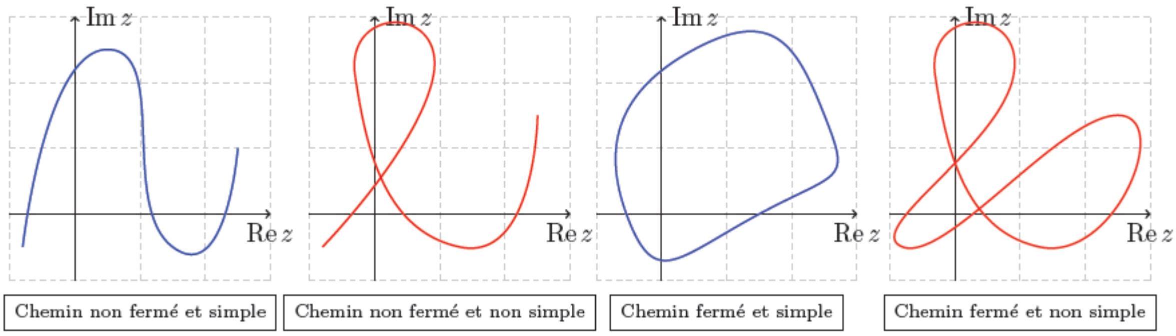
2. Un chemin est dit simple s'il ne se recoupe pas, i.e. il n'a pas de points doubles

3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.

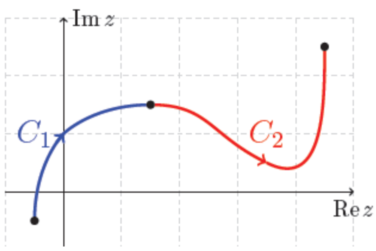
Exemple : 1) Le cercle de centre z_0 et de rayon r, $C = \{z \in C : |z - z_0| = r\}$ est paramétré par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $r \in [0, 2\pi]$, c'est une courbe de Jordan.

2) $C = \{t + it^2,\ t \in [-1, 2]\}$ est une courbe simple, partie de la parabole d'équation $y = x^2$, d'origine $-1 + i$ et d'extrémité $2 + 4i$.

Exemple 4.1.3



Définition 4.1.4 *Soit C_1 et C_2 deux courbes telles que l'extrémité de C_1 coïncide avec l'origine de C_2, alors $C_1 \cup C_2$ est une courbe appelée courbe composée de C_1 et C_2.*



Exemple : la courbe $C = \left\{e^{it},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup \{(1-t)\, i + t\,(-1+i)\,,\ t \in [0,1]\}$ est composée d'un arc de cercle et d'un segment.

4.2 Integration le long d'une courbe

Définition 4.2.1 *Soit D un domaine non vide de $\mathbb{C}$, et soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe C^1, $\gamma : [a,b] \to D,\ t \mapsto \gamma(t)$, et soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue en tout point de C. On appelle intégrale de f le long de la courbe C et on le note $\int_C f(z)\,dz$, le nombre complexe*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Remarque : 1) L'intégrale ci-dessus est appelée aussi intégrale le long du chemin γ et notée $\int_\gamma f(z)\,dz$.

2) Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre on utilise le signe $\oint$ au lieu de $\int$. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé sens positif ou direct.

Exemple : Calculons l'intégrale $\int_C z^2 dz$, où $C = \left\{\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}\right\}$.

On a $\gamma'(t) = 2ie^{it}$, donc

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(2e^{it}\right)^2 2ie^{it} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it} dt = \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} - \frac{8}{3}e^0 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}i.$$

Les propriétés suivantes sont analogues à celles des intégrales réelles.

Proposition 4.2.2

1. $\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz + \beta \int_C g(z)\,dz,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, *où $-C$ est la courbe C parcourue dans le sens inverse.*
3. *Si $C = C_1 \cup C_2$, alors* $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$.

Exemple 4.2.3 *Calculons l'intégrale $\int_C z^2 dz$, où C est la courbe formée du segment $[-1,1]$ et du demi-cercle unité supérieur.*

On a $C = C_1 \cup C_2 = \{\gamma_1(t) = t,\ t \in [-1,1]\} \cup \{\gamma_2(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi\}$, *donc*

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^{1} t^2 dt + \int_0^{\pi} e^{2it} i e^{it} dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}e^{3it}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2) = 0.$$

Longueur d'une courbe :

Soit C une courbe paramétrée par un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1. La longueur L_C de la courbe C est définie par

$$L_C = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Exemple : Calculons la longueur du cercle $C = \{\gamma(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\},\ r > 0$.

On a $\gamma'(t) = ire^{it}$, donc $|\gamma'(t)| = |re^{it}| = r$. D'où $L_C = \int_0^{2\pi} r dt = [rt]_0^{2\pi} = 2\pi r$.

Proposition 4.2.4 *Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan $\mathbb{C}$, et soit $C = \{\gamma(t),\ t \in [a,b]\}$ une courbe. Supposons que*

$$\exists M > 0 : |f(\gamma(t))| \leq M,\ \forall t \in [a,b],$$

alors

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq M L_C.$$

Preuve. Par définition on a

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\, \gamma'(t)|\, dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M L_C.$$

□

4.3 Théorème de Cauchy et ses conséquences

4.3.1 Domaines simplement connexes et multiplement connexes

Définition 4.3.1 *Un domaine D du plan complexe est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D. Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.*

Intuitivement, un domaine simplement connexe est sans trous.

4.3.2 Théorème de Cauchy

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieur dans D. Alors*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Remarque : Ce théorème fondamental est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes. Il existe deux démonstrations différentes de ce théorème, la première preuve donnée utilise la formule de Green-Riemann et les formes différentielles, cependant Goursat a proposé une autre démonstration moins difficile ; c'est pourquoi on l'appelle quelquefois "*Théorème de Cauchy-Goursat*".

Pour la preuve de ce théorème, nous référons au Rudin [6] ou Murray [5].

Exemple : 1) On a vu que $\oint_C z^2 dz = 0$, où C est la courbe fermée, formée du segment $[-1, 1]$ et du demi-cercle unité supérieur, voir Exemple 4.2.3.

2) Calculons $\oint_C z dz$, où $C = \{\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$. On a

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}\left(2ie^{it}\right) dt = \int_0^{2\pi} 4ie^{i2t} dt = \left[2e^{i2t}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$

Le théorème de Cauchy admet une réciproque.

Théorème 4.3.3 (de Morera) *Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe D. Supposons que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ pour toute courbe fermée et simple C dans D. Alors f est holomorphe dans D.*

Preuve. Voir Rudin [6] ou Murray [5]. □

4.3.3 Primitives ou intégrales indéfinies

Définition 4.3.4 *Soit f et F deux fonctions holomorphes dans un domaine connexe D telles que $F'(z) = f(z)$. Alors F est appelée intégrale indéfinie ou primitive de f, et on note*

$$F(z) = \int f(z)\,dz.$$

Remarque : Comme la dérivée d'une constante est nulle, alors deux primitives d'une même fonction se diffèrent d'une constante. Pour cela souvent on ajoute une constante à l'une des primitives.

Exemple : La fonction $z \to 3z^2 - 4\sin z$ est une primitive de $z \to 6z - 4\cos z$, donc

$$\int (6z - 4\cos z)\,dz = 3z^2 - 4\sin z + c,\ \ c \in \mathbb{C}.$$

Intégrales de fonctions élémentaires :

Nous donnons les primitives de quelques fonctions usuelles, on a omis ici la constante.

1) $\int z^\alpha dz = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1,$

2) $\int \frac{1}{z} dz = \log z,$

3) $\int e^z dz = e^z,$

4) $\int \sin z = -\cos z,$

5) $\int \cos z = \sin z,$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 z} dz = \tan z,$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 z} dz = -\cot z,$

8) $\int \tan z dz = -\log\cos z,$

9) $\int \cot z dz = \log\sin z.$

4.3.4 Quelques conséquences du théorème de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D. Comme conséquences du théorème de Cauchy, nous avons les résultats suivants.

Corollaire 4.3.5 *Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D, alors $\int_C f(z)\,dz$ est indépendant du chemin C joignant z_0 à z_1. On la note alors $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$.*

En particulier la fonction $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw,\ z \in D$, est holomorphe dans D, et $F'(z) = f(z)$.

Exemple : Calculons l'intégrale $\int_0^{1+i} zdz$, suivant les deux chemins $C_1 = [0, 1+i]$ et $C_2 = \{\gamma_2(t) = t + it^2,\ 0 \le t \le 1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} zdz &= \int_0^1 (1+i)\,t\,(1+i)\,dt = \left[(1+i)^2 \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(1+i)^2}{2} = i, \\
\int_{C_2} zdz &= \int_0^1 \left(t + it^2\right)(1+i2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(t+it^2\right)^2\right]_0^1 = \frac{(1+i)^2}{2} = i
\end{aligned}$$

Corollaire 4.3.6 *Si a et b sont deux points quelconques de D, et si $F'(z) = f(z)$, alors*

$$\int_a^b f(z)\,dz = [F(z)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple : Calculons l'intégrale $\int_0^{1+i} zdz$. Comme $\frac{1}{2}z^2$ est une primitive de z, alors

$$\int_0^{1+i} zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

Théorème 4.3.7 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées et simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors*

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz,$$

Exemple : Calculons $\oint_C \frac{1}{z^2}dz$, où C est l'ellipse paramétrée par le chemin

$$\gamma(t) = 3\cos t + 2i\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Considérons le cercle unité $C_1 = \{e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$. Puisque la fonction $\frac{1}{z^2}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, alors

$$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i2t}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{-it} dt = \left[-e^{-it}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Remarque 4.3.8 *Le théorème précédent peut être étendu à un domaine connexe limité par une courbe fermée simple C et un nombre fini de courbes fermées simples $C_1, \ldots C_n$ intérieures à C, dans ce cas on a*

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz$$

4.4 Formule intégrale de Cauchy et conséquences

4.4.1 Formules intégrales de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, et soit a un point intérieur à C, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{4.1}$$

De même la dérivée $n-$ième de f en $z = a$, est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,\ n = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

Remarque : la première formule est un cas particulier de la deuxième.

Exemple : Utilisons la formule de Cauchy pour calculer $\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz$ et $\oint_C \frac{1}{(z-2)^3(z+1)} dz$, où $C = \{2 + e^{it}; t \in [0, 2\pi]\}$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C, d'après les formules (4.1) et (4.2) on a

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = \frac{2\pi}{3} i, \\
\oint_C \frac{1}{(z-2)^3 (z+1)} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(2)
\end{aligned}$$

Or $f'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$ et $f''(z) = \frac{2}{(z+1)^3}$, d'où

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^3 (z+1)} dz = \frac{2\pi}{27} i.$$

4.4.2 Quelques conséquences

Comme conséquences des formules intégrales de Cauchy, on obtient les résultats suivants.

1) **Dérivée d'ordre spérieur :** Si f est holomorphe dans un domaine D, alors f est de classe C^∞ dans D.

   Ce théorème déjà énoncé dans le chapitre 3, découle donc de la formule (4.2).

2) **Inégalité de Cauchy :** Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, avec $C = \{|z-a| = r\}$, alors

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \sup_{z \in C} |f(z)| \frac{n!}{r^n}, \ n = 0, 1, 2, ...$$

3) **Théorème de Liouville :** Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et si f est bornée sur $\mathbb{C}$, i.e. $|f(z)| \leq M$ pour certain $M \in \mathbb{R}_+$, alors f est constante.

4) **Théorème de D'Alembert :** Toute équation $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$, de degré $n \geq 1$ possède n racines, où chaque racine est comptée avec son ordre de multiplicité.

5) **Théorème de maximum et minimum :** Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C.

   Si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C, alors $|f(z)|$ atteint son minimum sur C.

4.5 Exercices

4.5.1 Exercices résolus

Exercice 4.1 *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_C zdz$, *où* C *est un segement* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$.
2. $\int_C \operatorname{Re} zdz$, *où* C *est le cercle unité parcouru dans le sens positif.*
3. $\int_C z^2dz$, *où* C *est la partie de la parabole d'équation* $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Solution :

1. le segment $[a,b]$, est paramétré par le chemin

$$\gamma(t) = (1-t)\,a + tb,\ \ t \in [0,1],$$

donc

$$\begin{aligned}\int_C zdz &= \int_0^1 \gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 ((1-t)\,a + tb)\,(b-a)\,dt \\ &= (b-a)\int_0^1 (a + (b-a)\,t)\,dt = (b-a)\left[at + (b-a)\,\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= (b-a)\left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right) = (b-a)\,\frac{(b+a)}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\end{aligned}$$

2. Le cercle unité parcouru dans le sens positif est paramétré par

$$\gamma(t) = e^{it},\ \ -\pi \leq t \leq \pi,$$

donc

$$\int_C \operatorname{Re} zdz = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t\left(ie^{it}\right)dt = i\int_{-\pi}^{+\pi} \cos t\,(\cos t + i\sin t)\,dt = i\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 tdt,$$

car la fonction $\cos t \sin t$ est impaire, et donc son intégrale sur $[-\pi,\pi]$ vaut 0.

Or $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$, d'où

$$\int_C \operatorname{Re} zdz = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos 2t + 1)\,dt = \left[\frac{i}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = i\pi$$

3. La partie de la parabole est paramétrée par

$$\gamma(t) = t + it^2,\ 0 \leq t \leq 1,$$

donc

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 \left(t + it^2\right)^2 (1 + i2t)\, dt = \left[\frac{1}{3}\left(t + it^2\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

Exercice 4.2 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue réelle telle que $|f(z)| \leq 1$ et soit C le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que*

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq 4.$$

Solution : Posons

$$\int_C f(z)\, dz = \left|\int_C f(z)\, dz\right| e^{i\gamma},$$

et choisisons la paramétrisation $z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ du cercle unité C, donc

$$\begin{aligned} \left|\int_C f(z)\, dz\right| &= \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{i(t-\gamma)} dt = \operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{i(t-\gamma)} dt\right) \\ &= \int_0^{2\pi} -f\left(e^{it}\right) \sin(t-\gamma)\, dt, \end{aligned}$$

car f est réelle, et comme $|f(z)| \leq 1$, alors

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq \int_0^{2\pi} |\sin(t-\gamma)|\, dt,$$

or $\sin x \geq 0$ pour $x \in [0, \pi]$, et $\sin x \leq 0$ pour $x \in [-\pi, 0]$. On distingue deux cas :

– Si $\gamma \in [0, \pi]$: dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin(t-\gamma)|\, dt &= -\int_0^{\gamma} \sin(t-\gamma)\, dt + \int_{\gamma}^{\gamma+\pi} \sin(t-\gamma)\, dt - \int_{\gamma+\pi}^{2\pi} \sin(t-\gamma)\, dt \\ &= [\cos(t-\gamma)]_0^{\gamma} - [\cos(t-\gamma)]_{\gamma}^{\gamma+\pi} + [\cos(t-\gamma)]_{\gamma+\pi}^{2\pi} \\ &= (1 - \cos\gamma) - (-1-1) + (\cos\gamma + 1) = 4, \end{aligned}$$

et alors $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq 4$.

– Si $\gamma \in [\pi, 2\pi]$: on obtient le même résultat (à vérifier par le lecteur).

Remarqe : Ce résultat donne un borne optimale, car en utilisant l'inégalité d'estimation, on obtient une borne plus grande, en effet

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f(z)\, dz| \leq \int_C |dz| = L_C = 2\pi \simeq 6.28$$

Exercice 4.3 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé parcouru dans le sens positif et contenu ainsi que son intérieur dans D. Soit enfin z_1 et z_2 deux points à l'intérieur de C. Calculer*

$$\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

Qu'obtient-on lorsque $z_1 \to z_2$?

Solution : Décomposons la fraction en éléments simples, on obtient

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_1)(z - z_2)} &= \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_1} - \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_2} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{z_1 - z_2} \left(f(z_1) - f(z_2) \right) \end{aligned}$$

Lorsque $z_1 \to z_2$, on obtient

$$2\pi i f'(z_2) = \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_2)^2}.$$

Exercice 4.4 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Soit z_0 un point à l'intérieur de C. Montrer que*

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \int_C \frac{f^{(n)}(z)}{(z - z_0)} dz, \; n \in \mathbb{N}$$

Solution : Appliquant la formule de Cauchy à la fonction $f^{(n)}$, on trouve

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(n)}(z)}{(z - z_0)} dz,$$

et appliquant d'autre part la formule de Cauchy pour la n^{ieme} dérivée à la fonction f, on obtient

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

D'où l'égalité demandée.

Exercice 4.5 *C désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer*

$$\int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^2} dz.$$

Solution : En vertu de la formule de Cauchy pour la dérivée, on a

$$\int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \sin^6 z|_{z=\frac{\pi}{6}} = 2\pi i \left(6 \cos z \sin^5 z\right)|_{z=\frac{\pi}{6}} = i \frac{3\sqrt{3}\pi}{16}.$$

Exercice 4.6 *Calculer $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$, $n \in \mathbb{N}^*$, où C est une courbe fermée simple dans les deux cas suivants :*

(a) z_0 est à l'extérieur de C,

(b) z_0 est à l'intérieur de C (distinguer le cas $n = 1$ et $n \geq 2$).

Solution : (a) Si z_0 est à l'extérieur de C, alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{(z-z_0)^n}$ est holomorphe dans C, ainsi que dans son intérieur, donc d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = 0$$

(b) Si z_0 est à l'intérieur de C, on choisit $r > 0$ tel que le disque fermé $\{|z - z_0| \leq r\}$ soit contenu dans l'intérieur de C. Notons C_r le cercle $\{|z - z_0| = r\}$, alors d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \oint_{C_r} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz,$$

or C_r est paramétré par $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, d'où

– Si $n = 1$, on a

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \oint_{C_r} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

– Si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^n} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{-i(n-1)t}}{r^{n-1}} dt = \left[\frac{-e^{-i(n-1)t}}{(n-1)\, r^{n-1}}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-1}{(n-1)\, r^{n-1}} \left(e^{-i(n-1)2\pi} - 1\right) = 0.\end{aligned}$$

Exercice 4.7 *Calculer les intégrales indéfinies suivantes.*

(a) $\int \sin 3z \cos 3z \, dz$,

(b) $\int ze^{2z} dz$.

Solution : (a) Puisque $\left(\sin^2 3z\right)' = 6 \cos 3z \sin 3z$, alors

$$\int \sin 3z \cos 3z \, dz = \frac{1}{6} \sin^2(3z) + c, \; c \in \mathbb{C}$$

(b) En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\int ze^{2z} dz = z\left(\frac{1}{2} e^{2z}\right) - \int \frac{1}{2} e^{2z} dz = \frac{1}{2} z e^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z} + c, \; c \in \mathbb{C}$$

4.5.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 4.8 *Calculer* $\int_C \overline{z} dz$ *de* $z = 0$ *à* $z = 2+2i$ *le long de la courbe* $C = \{\gamma(t) = e^{it}\}$, *puis la courbe* $C = [0, 2i] \cup [2i, 2+2i]$.

Que peut-on conclure ?

Exercice 4.9 *C désignant le cercle unité parcouru dans le sens positif, calculer*

$$\int_C \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$$

Exercice 4.10 *Soit* $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue et C le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que*

$$\overline{\int_C \varphi(z)\, dz} = -\int_C \frac{\overline{\varphi(z)}}{z^2} dz.$$

Chapitre 5

Fonctions analytiques

5.1 Séries entières

Définition 5.1.1 *On appelle série entière toute série de la forme* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *, où les* a_n *et* z_0 *sont des nombres complexes.*

Définition 5.1.2 *On appelle rayon de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *, le nombre réel* R *tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *converge pour* $|z - z_0| < R$ *et diverge pour* $|z - z_0| > R$.

Remarque : 1) R peut prendre la valeur $+\infty$, dans ce cas le domaine de convergence est $\mathbb{C}$. Si $R = 0$, alors la série diverge partout sauf au point z_0.

2) le rayon de convergence peut être calculé par la règle de D'Alembert

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

ou la règle de Cauchy

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

3) Dans le cercle $|z - z_0| = R$, la série peut converger en certains points et diverger en d'autres.

Exemple : 1) la série $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Dans le cercle $|z| = 1$, elle converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.

2) la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$, et elle converge pour $|z| = 1$.

Proposition 5.1.3 *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme $S(z)$. Alors*

1. *La série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (z - z_0)^{n-1}$ a le même rayon de convergence R.*
2. *Pour tout $r < R$, les deux séries précédentes sont normalement convergentes (donc uniformément convergentes) sur $|z - z_0| \leq r$. Par conséquent*

– *$S(z)$ est holomorphe dans $D_R(z_0) = \{|z - z_0| < R\}$ et on a*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (z - z_0)^{n-1}.$$

– *Pour toute courbe contenue dans $|z - z_0| < R$, on a*

$$\int_C S(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C a_n (z - z_0)^n\, dz.$$

Preuve. 1. Tout d'abord on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z - z_0)^n,$$

c'est-à-dire ses coefficients sont $a'_n = (n+1)\, a_{n+1}$, donc par la règle de D'alembert on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\, a_{n+1}}{(n+2)\, a_{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

puisque la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)$ est extraite de la suite $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

2. Soit $r < R$, et choisissons z_1 dans le disque $\{|z - z_0| < R\}$ tel que $r < |z_1 - z_0| < R$, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ est convergente, et par suite $\lim a_n (z_1 - z_0)^n = 0$, d'où

$$a_n (z_1 - z_0)^n < 1, \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

ou encore

$$\exists N \in \mathbb{N} : a_n < \frac{1}{(z_1 - z_0)^n},\ \forall n \geq N$$

D'où pour $|z - z_0| \leq r$ et $n \geq N$, on obtient

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq \frac{r^n}{(z_1 - z_0)^n}$$

Comme $\left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right| < 1$, alors la série géométrique $\sum \frac{r^n}{(z_1 - z_0)^n}$ converge, par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\{|z - z_0| \leq r\}$.

Même démonstration pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ en remplaçant a_n par $a'_n = (n+1)\, a_{n+1}$.

En appliquant les théorèmes de continuité, de dérivabilité et d'intégration sur les séries de fonctions, on obtient les deux dernières conséquences de la proposition 5.1.3. □

5.2 Fonctions analytiques et séries de Taylor

Définition 5.2.1 *Une fonction f est dite analytique dans un domaine D, si*

$$\forall z_0 \in D, \exists r > 0; D_r(z_0) \subset D, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D_r(z_0).$$

Exemple : la fonction $f(z) = e^z$ est analytique dans $\mathbb{C}$. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = e^{z - z_0 + z_0} = e^{z_0} e^{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z - z_0)^n,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

Définition 5.2.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D. On appelle série de Taylor associée à f au point $z_0 \in D$, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Proposition 5.2.3 *Toute fonction analytique dans un domaine D, est holomorphe dans D.*

Inversement si f est une fonction holomorphe dans D, alors elle est analytique dans D, de plus les coefficients a_n sont donnés par $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Preuve. La condition nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 5.1.3.

Inversement supposons que f est holomorphe dans D, et montrons qu'elle est analytique dans D.

Soit $z_0 \in D$, et soit $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}_r(z_0)$ soit contenu dans D. Notons C le cercle $\{|z - z_0| = r\}$, alors par la formule intégrale de Cauchy on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw, \text{ pour } |z - z_0| < r, \tag{5.1}$$

or pour tout $w \in C$ et $|z - z_0| < r$, on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}, \tag{5.2}$$

car $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \left|\frac{z-z_0}{r}\right| < 1.$

De plus la dernière série est normalement convergente sur le cercle C, en effet

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{w-z_0}\right|\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n,$$

et la série géométrique $\sum\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^n$ est convergente puisque $\left|\frac{z-z_0}{r}\right| < 1.$

En remplaçant (5.2) dans (5.1) et en tenant compte des conséquences de la proposition 5.1.3, on trouve pour $|z - z_0| < r$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

où $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$. Ainsi f est analytique dans D.

Mais d'après la deuxième formule intégrale de Cauchy on a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, \text{ pour } |z - z_0| < r,$$

d'où $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

Remarque : la proposition 5.2.3 est fausse pour les fonctions d'une variable réelle, de telles fonctions peuvent être de classe C^{∞} sans être analytiques. Par exemple

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$$

On a $f^{(n)}\left(0\right)=0, \forall n\in\mathbb{N}$, donc sa série de Taylor est nulle au voisinage de 0, mais la fonction f n'est pas nulle au voisinage de 0. D'où f est de classe C^{∞} mais elle n'est pas analytique.

5.3 Quelques séries particulières

Comme application de la proposition 5.2.3, nous donnons le développement en séries entières (séries de Taylor) de quelques fonctions usuelles, avec leurs rayons de convergence.

1. $e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z\in\mathbb{C}.$
2. $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+\left(-1\right)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}.$
3. $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+\left(-1\right)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C}.$
4. $\log\left(1+z\right)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad \left|z\right|<1.$
5. $\arctan z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots+\left(-1\right)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \left|z\right|<1.$
6. $\left(1+z\right)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots, \quad \left|z\right|<1.$

   Si $\left(1+z\right)^{\alpha}$ est multiforme, le développement est valable pour la branche de fonction qui prend la valeur 1 pour $z=0$.

5.4 Exercices

5.4.1 Exercices résolus

Exercice 5.1 *Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries entières suivantes.*

$$a) \sum_{n\geq 0} e^{-n} z^n, \quad b) \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n^2} z^n, \quad c) \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^{3n}$$

Solution : $a)$ Par la règle de Cauchy on a

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e^{-n}}} = \frac{1}{e^{-1}} = e,$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} e^{-n} z^n$ est $R = e$.

Pour $|z| = e$, la série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0, en effet

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{-n} z^n \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Ainsi le domaine de la convergence de la série est le disque ouvert $D = \{|z| < e\}$.

$b)$ Par la règle de Cauchy on a

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{3^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \frac{1}{3},$$

car $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$, en effet

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \lim_{n\to\infty} \exp \ln n^{2/n} = \lim_{n\to\infty} \exp \frac{2 \ln n}{n} = e^0 = 1,$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n^2} z^n$ est $R = \frac{1}{3}$.

Pour $|z| = \frac{1}{3}$, la série est convergente, en effet

$$\left| \frac{3^n}{n^2} z^n \right| = \frac{1}{n^2},$$

et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Ainsi le domaine de la convergence de la série est le disque fermé $D = \left\{|z| \leq \frac{1}{3}\right\}$.

$c)$ Dans cette série les coefficients a_n sont de la forme

$$a_{3n} = \frac{n!}{n^n},\ a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

il est préférable alors, d'utiliser la règle de D'Alembert générale (pour les séries quelconques). On a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}z^{3n+3}}{\frac{n!}{n^n}z^{3n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|z^3\right|\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left|z^3\right|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left|z^3\right|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left|z^3\right|\frac{1}{e},$$

donc la série $\sum \frac{n!}{n^n}z^{3n}$ converge pour $\left|z^3\right|\frac{1}{e} < 1$ et diverge pour $\left|z^3\right|\frac{1}{e} > 1$, d'où son rayon de convergence est $R = \sqrt[3]{e}$.

Pour $|z| = \sqrt[3]{e}$, la série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0, en effet comme $e^n \geq \frac{n^n}{n!}$, alors

$$\left|\frac{n!}{n^n}z^{3n}\right| = \frac{n!}{n^n}e^n \geq \frac{n!}{n^n}\frac{n^n}{n!} = 1 \nrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Exercice 5.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.*

Solution : Posons $w = z^2$, alors la série entière $\sum a_n w^n$ converge pour $|w| < R$ et diverge pour $|w| > R$, en d'autres termes la série $\sum a_n z^{2n}$ converge pour $|z| < \sqrt{R}$ et diverge pour $|z| > \sqrt{R}$, d'où son rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

Exercice 5.3 1) *Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}z^n$.*

2) *Si D désigne le domaine de convergence de cette série, montrer que*

$$\{|z| < R\} \subsetneq D \subsetneq \{|z| \leq R\}$$

Solution : 1) Comme $\sin\frac{1}{n} \geq 0, \forall n \geq 1$, et $\sin\frac{1}{n} \overset{\infty}{\backsim} \frac{1}{n}$, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}z^n$, est $R = 1$, qui est aussi celui de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n$ (facile à vérifier).

2) Ces inclusions strictes veulent dire que sur le cercle $\{|z| = R\}$, la série converge en certains points et diverge en d'autres. En effet

– pour $z = 1$, la série $\sum \sin \frac{1}{n}$ diverge car elle est équivalente à la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

– pour $z = -1$, la série $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ converge d'après le théorème de Leibniz, car $\sin \frac{1}{n}$ est une suite décroissante tendant vers 0.

Exercice 5.4 *Soit* $f(z) = \log(1+z)$, *où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour* $z = 0$.

(a) *Développer* $f(z)$ *en série de Taylor au voisinage de* $z = 0$.

(b) *En déduire le Développement de* $\log \frac{1+z}{1-z}$ *en série de Taylor au voisinage de* $z = 0$.

Solution : (a) La fonction f est holomorphe au voisinage de $z = 0$, donc elle est développable en série de Taylor. Calculons alors les dérivées $f^{(n)}(0)$, pour $n = 1, 2, ...$ On a

$$f'(z) = \frac{1}{1+z},\ f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2},\ f'''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3}, ...,\ f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}$$

Substituant pour $z = 0$, et remplaçant dans l'expression de la série de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}\log(1+z) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots\end{aligned}$$

(b) On a

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \log(1+z) - \log(1-z),$$

remplaçant z par $-z$ dans le développement précédent, on trouve

$$\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} z^n,$$

d'où

$$\begin{aligned}\log\frac{1+z}{1-z} &= \left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots\right]+\left[z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots\right]\\ &= 2\left[z+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Exercice 5.5 *Montrer que la série entière*

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\cosh n\frac{z^{2n}}{n!}$$

est convergente pour tout nombre complexe z, et calculer sa somme.

Solution : Par la règle de D'Alembert (voir aussi exercice 5.2), on a

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cosh n}{n!}\frac{(n+1)!}{\cosh(n+1)}\right)^{1/2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n+e^{-n}}{e^{n+1}+e^{-n-1}}(n+1)\right)^{1/2}=\infty,$$

donc la série est convergente pour tout nombre complexe z.

En écrivant

$$\cosh n=\frac{e^n+e^{-n}}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}S(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}\frac{z^{2n}}{n!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ez^2)^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-1}z^2)^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\exp\left(ez^2\right)-1+\exp\left(e^{-1}z^2\right)-1\right)\\ &= -1+\left(\exp\left(ez^2\right)+\exp\left(e^{-1}z^2\right)\right)\end{aligned}$$

Exercice 5.6 *Déterminer le rayon de convergence R de la série*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$$

et calculer pour tout $x\in[-R,R]$, sa somme.

Solution : 1. Par la règle de Cauchy on a

$$R=\lim_{n\to\infty}(n(n+1))^{1/n}=1$$

De plus la série converge absolument pour $|z| = 1$, par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$,

$$\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

2. En décomposant la fraction en éléments simples, on a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

de plus les séries entières de coefficients $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ ont pour rayon de convergence 1.

Donc, pour $|x| < 1$, on a

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1},$$

et si de plus $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(\ln(1-x) + x) \\ &= 1 - \frac{x-1}{x} \ln(1-x). \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on a clairement $S(0) = 0$.

Enfin la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ est normalement convergente sur $|z| \leq 1$, car

$$\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2},\ \forall |z| \leq 1,$$

donc $S(z)$ est continue sur $|z| \leq 1$. En particulier pour $x = -1$ et $x = 1$, d'où

$$S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = 1 \text{ et } S(-1) = \lim_{x \to -1^+} S(x) = 1 - 2\ln 2.$$

5.4.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 5.7 1. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.*

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}, \quad 2) \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^n.$$

2. *Montrer que le domaine de convergence de la première série est le disque ouvert* $|z| < R$, *où* R *désigne son rayon de convergence ; et que le domaine de convergence de la deuxième série n'est ni un disque ouvert, ni un disque fermé.*

Exercice 5.8 *Soit* $\alpha > 0$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^{\alpha n}$ *en fonction de celui de la série entière* $\sum a_n z^n$.

Exercice 5.9 1. *Calculer la somme des séries entières suivantes pour tout nombre complexe* z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n \frac{z^n}{n!}.$$

2. *En déduire le développement en série entière de*

$$e^z \cos z, \quad \text{et } e^z \sin z.$$

Chapitre 6

Théorème des résidus

6.1 Séries de Laurent

Définition 6.1.1 *Une série de puissances de la forme*

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} \\ &\quad + a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \cdots\end{aligned} \tag{6.1}$$

s'appelle série de Laurent centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définition 6.1.2 *La série des puissances négatives*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \cdots$$

s'appelle la partie principale, et la série de puissances positives

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \cdots$$

s'appelle la partie régulière ou analytique.

Remarque : Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Définition 6.1.3 *La série de Laurent est dite convergente si ses parties principale et analytique sont convergentes.*

Remarque : En général le domaine de convergence de la série est une couronne $\{r < |z - z_0| < R\}$, en plus de certains points de la frontière $\{|z - z_0| = r\} \cup \{|z - z_0| = R\}$.

Plus précisément R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Pour la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, posons $w = \frac{1}{z-z_0}$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$. Soit s le rayon de convergence de cette dernière série, donc elle converge pour $|w| < s$, i.e. pour $|z - z_0| > \frac{1}{s}$. Posons $r = \frac{1}{s}$, on conclut alors

- Si $r < R$, le domaine de convergence de la série de Laurent (6.1) contient au moins la couronne $\{r < |z - z_0| < R\}$.
- Si $r = R$, le domaine de convergence de la série de Laurent (6.1) contient au plus des points du cercle $\{|z - z_0| = R\}$.
- Si $r > R$, le domaine de convergence de la série de Laurent (6.1) est vide.

Théorème 6.1.4 *Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$, et soit f une fonction uniforme holomorphe dans la couronne D limitée par les cercles C_1 et C_2 et sur ces cercles. Alors f se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 i.e*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \textit{pour tout } z \in D,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z}, \ \textit{avec } C = C_1 \textit{ ou } C = C_2.$$

Preuve. Choisissons $z_1 \in C_1$ et $z_2 \in C_2$ sur une demi-droite issue de z_0, et considérons la courbe fermée $C = C_1 \cup [z_1, z_2] \cup (-C_2) \cup [z_2, z_1]$. Alors d'après la formule de Cauchy, pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

puisque $\oint_{[z_1,z_2]} \frac{f(w)}{w-z} dw + \oint_{[z_2,z_1]} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$

Nous allons développer chaque terme du second membre.

Pour tout $w \in C_1$, on a $|z - z_0| < |w - z_0| = R_1$, d'où

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} . \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

De plus cette série est uniformément convergente dans C_1, car

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|(z - z_0)^n|}{R_1^{n+1}} = \frac{1}{R_1} \left| \left(\frac{z - z_0}{R_1} \right)^n \right|$$

et $\sum \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^n$ converge puisque $\left| \frac{z-z_0}{R} \right| < 1$. Ainsi et d'après les théorèmes sur les séries de fonctions on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

De même pour le deuxième terme, comme $R_2 = |w - z_0| < |z - z_0|$, on trouve

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} dw.$$

Par conséquent et en faisant la somme, on aboutit au résultat demandé.

Remarquons que les coefficients a_n de la serie de Laurent obtenue dépendent seulement de $f(z)$, donc ils sont uniques.

Enfin le choix des courbes est dû au théorème 4.3.7 qui est une conséquence du théorème de Cauchy. □

Remarque 6.1.5 *La série de Laurent peut être obtenue sans calculer les coefficients a_n par la formule donnée dans le théorème ci-dessus, en effet on utilise souvent un développement en séries entières.*

Exemple : Donnons le développement en série de Laurent de la fonction

$f(z) = \frac{z-1-\pi}{(2z-1)(z+\pi)}$ dans la couronne

$$D = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 3\}$$

Par décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{z-1-\pi}{(2z-1)(z+\pi)} = \frac{1}{z+\pi} - \frac{1}{2z-1}$$

Comme $|z| < 3$, alors $\left|\frac{z}{\pi}\right| < 1$, par suite

$$\frac{1}{z+\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{\pi}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{\pi}\right)^n z^n$$

D'autre part $1 < |z|$, donc $\left|\frac{1}{2z}\right| < \frac{1}{2} < 1$, d'où

$$\frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}\right) = \frac{1}{2z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{z^n}$$

Par conséquent pour tout $z \in D$, on obtient

$$\frac{z-1-\pi}{(2z-1)(z+\pi)} = -\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{z^n} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{\pi}\right)^n z^n$$

6.2 Classification des singularités

Il est possible de classer les singularités isolées d'une fonction f à l'aide de sa série de Laurent. Supposons que z_0 une singularité isolée de f, i.e. f est holomorphe dans un disque pointé en z_0, donc f admet un développement en série de Laurent centré en z_0, (dans ce cas $r = 0$).

1. Si la partie principale du développement est nulle, z_0 est une singularité apparente.

   Exemple : La fonction $\frac{\sin z}{z}$ a une singularité en $z_0 = 0$, et comme

   $$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

   alors $z_0 = 0$ est une singularité apparente.

2. Si la partie principale du développement contient un nombre fini de termes i.e.

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

alors z_0 est un pôle d'ordre k.

Exemple : La fonction $\frac{e^z-1}{z^2}$ a une singularité en $z_0 = 0$, et comme

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} \cdots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \cdots ,$$

alors $z_0 = 0$ est un pôle simple.

3. Si la partie principale du développement contient un nombre infini de termes, alors z_0 est une singularité essentielle.

Exemple : La fonction $e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité en $z_0 = 0$, et comme

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots ,$$

donc $z_0 = 0$ est une singularité essentielle.

6.3 Résidus

Soit f une fonction uniforme holomorphe sur un cercle C et à l'intérieur de C, sauf au point z_0 centre de C.

Définition 6.3.1 *On appelle le résidu de f au point z_0 qu'on note* $\mathrm{Res}(f, z_0)$, *le nombre complexe*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz.$$

Remarque : D'après le théorème de Laurent, f admet un développement en série de Laurent centrée en z_0,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots ,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z},$$

en particulier pour $n = -1$, on trouve

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz = \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Ainsi $\mathrm{Res}(f, z_0)$ peut être obtenu directement du développement de f en série de Laurent.

6.3.1 Calcul des résidus

Pour calculer le résidu d'une fonction f en un point z_0, nous avons le choix d'utiliser la définition ou le développement de f en série de Laurent. Dans certains cas on peut le calculer de manière plus simple.

Proposition 6.3.2 *Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right],$$

en particulier, si z_0 est un pôle simple de f, on a

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Preuve. En effet dans ce cas f admet un developpement en série de Laurent de la forme

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

En multipliant les deux membres par $(z-z_0)^m$, on obtient

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m},$$

qui est une série entière de somme $(z-z_0)^m f(z)$. Par dérivation $m-1$ fois on trouve

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] = (m-1)! a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) \cdots (n+2)\, a_n (z-z_0)^{n+1}$$

Par passage à la limite lorsque z tend vers z_0, on déduit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = (m-1)! a_{-1},$$

d'où le résultat cherché. □

Exemple : 1) Le point $z_0 = 0$ est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$, (voir exemple plus haut), donc

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 1} z \frac{e^z - 1}{z^2} = \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

2) Le point $z_0 = 1$ est un pôle double $(m = 2)$ de la fonction $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^2}$, donc

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left((z-1)^2 \frac{ze^z}{(z-1)^2} \right) = \lim_{z \to 1} (e^z + ze^z) = 2e.$$

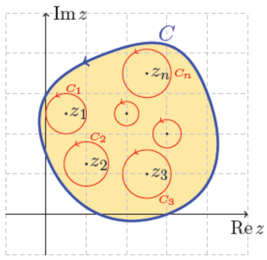
6.3.2 Le théorème des résidus

Nous donnons maintenant le théorème des résidus qui généralise celui de Cauchy.

Théorème 6.3.3 *Soit f une fonction uniforme holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_n$ intérieures à C, alors*

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Preuve. Puique les points $z_1, \ldots, z_n$ sont à l'intérieur de C, alors on peut construire des cercles $C_1, \ldots, C_n$ centrés en $z_1, \ldots, z_n$ respectivement contenus à l'intérieur de C, disjoints deux à deux.



Donc d'après le théorème 4.3.7 et la remarque 4.3.8, on a

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz,$$

or par définition du résidu,

$$\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)\,,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

D'où

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

□

Exemple : Calculons l'intégrale

$$\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}dz, \text{ où } C \text{ est le cercle } |z| = \frac{2}{3}.$$

La fonction $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}$ a deux pôles simples $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{1}{2}$, situés à l'intérieur de C, en effet c'est évident pour z_2, et on a

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \frac{1}{2} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\log(z+1)}{z^2} = 2\log\frac{3}{2}$$

Pour z_1 on a

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\log(z+1)}{z}\frac{1}{2z-1} = 1 \times \frac{1}{2\times 0 - 1} = -1 = \operatorname{Res}(f, 0)$$

Ainsi

$$\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right)\right] = 2\pi i\left[-1 + 2\log\frac{3}{2}\right].$$

6.4 Exercices

6.4.1 Exercices résolus

Exercice 6.1 *Donner le développement en série de Laurent au point $z_0 = 1$ des fonctions*

$$1)\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2},\quad 2)\ g(z) = \frac{z+1}{(z-1)\,z}.$$

Solution : 1) Pour la fonction $f(z)$ on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{ee^{z-1}}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \\
&= \frac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\frac{(z-1)^4}{4!}+\cdots\right) \\
&= \frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{(z-1)}+\frac{e}{2!}+\frac{e(z-1)}{3!}+\frac{e(z-1)^2}{4!}+\cdots \\
&= \frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^n}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

2) Pour la fonction $g(z)$, posons $w = z-1$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{z+1}{(z-1)z} = \frac{w+2}{w(1+w)} = \frac{1}{(1+w)}+\frac{2}{w(1+w)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^k + \frac{2}{w}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^k + 2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^k + \frac{2}{w} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k w^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k w^k + \frac{2}{w} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1} w^k \\
&= \frac{2}{z-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(2(-1)^{k+1}+(-1)^k\right)(z-1)^k
\end{aligned}$$

Exercice 6.2 *Déterminer la nature des singularités des fonctions suivantes*

$$f_1(z) = \frac{z}{e^z-1},\quad f_2(z) = \frac{z}{(2\sin z-1)^2}\ \textit{et}\ f_3(z) = \frac{z}{\sin\frac{1}{z}}.$$

Solution : 1. Pour la fonction $f_1(z)$, on a $e^z-1=0$ si et seulement si $z = i2k\pi = z_k$, $k\in\mathbb{Z}$, et comme la dérivée $(e^z-1)' = e^z$ ne s'annule pas en z_k, chaque z_k est un pôle simple, exepté $z_0 = 0$, qui est une singularité apparente. En effet

$$\lim_{z\to 0} z\frac{1}{e^z-1} = 1,$$

et pour z_k, $k\in\mathbb{Z}^*$,

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{1}{e^z-1} = \frac{0}{0}$$

Par la règle de l'Hôpital on a

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{1}{e^z-1}=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)'}{(e^z-1)'}=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{e^z}=1$$

2. Pour la fonction $f_2(z)$, on a $2\sin z-1=0$ si et seulement si $z=z_k=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, ou $z=z_k=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Montrons que les nombres z_k sont des pôles doubles pour la fonction $f_2(z)$. En effet

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^2\frac{z}{(2\sin z-1)^2}=\frac{0}{0}$$

Par la règle de l'Hôpital on a

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^2\frac{z}{(2\sin z-1)^2}=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)^2+2(z-z_k)z}{4\cos z(2\sin z-1)}=\frac{0}{0}$$

Utilisant encore une fois la règle de l'Hôpital on obtient

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^2\frac{z}{(2\sin z-1)^2}=\lim_{z\to z_k}\frac{2(z-z_k)+2(z-z_k)+2z}{4(-\sin z(2\sin z-1)+2\cos^2 z)}=\frac{z_k}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{z_k}{3}\neq 0$$

3. Il est clair que $z_0=0$ est une singularité de $f_3(z)$, en plus des zéros du dénominateur $\sin\frac{1}{z}$ qui sont les points $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}^*$. Comme la dérivée $\left(\sin\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}$ ne s'annule pas aux points z_k, alors ces points sont des pôles simples.

Quant à $z_0=0$, ce n'est pas une singularité isolée puisqu'elle est limite des z_k. En fait $z_0=0$ est une singularité essentielle, car il n'est ni une singularité apparente, ni un pôle.

Exercice 6.3 *Déterminer le résidu à chacun des pôles de la fonction rationnelle*

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z+1)},$$

Solution : La fonction f admet un pôle simple en -1 et un pôle double en 1. D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,-1)&=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z}{(z-1)^2(z+1)}=-\frac{1}{4},\\ \operatorname{Res}(f,1)&=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2f(z)\right]|_{z=1}=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+1}\right)|_{z=1}=\frac{1}{(z+1)^2}|_{z=1}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 6.4 *Soit* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *une fonction rationnelle. Montrer que si* z_0 *est un pôle simple de* f*, alors*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Application : *Calculer* $\operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{z^3+1}, z=-1\right)$.

Solution : Puisque z_0 est un pôle simple de f, alors z_0 est une racine simple de $Q(z)$, donc $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$. D'où

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{0}{0},$$

donc par la règle de l'Hôpital, (puisque les fonctions $(z - z_0) P(z)$ et $Q(z)$ sonst holomorphes) on obtient

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{((z - z_0) P(z))'}{Q'(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z) + (z - z_0) P'(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Application : les racines de $z^3 + 1$ sont $-1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ et $\frac{1}{2} i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, donc -1 est un pôle simple de $\frac{z-1}{z^3+1}$, ainsi

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{z^3+1}, z=-1\right) = \frac{(z-1)\,|_{z=-1}}{(z^3+1)'\,|_{z=-1}} = \frac{-2}{3 \times (-1)^2} = \frac{-2}{3}$$

Exercice 6.5 *Trouver le résidu au point* $z_0 = 0$ *de la fonction*

$$g(z) = \frac{\log(2 - z)}{z^2}$$

Solution : Utilisons un développement de Laurent de la fonction g au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} \log(2 - z) &= \log 2\left(1 - \frac{z}{2}\right) = \log 2 + \log\left(1 - \frac{z}{2}\right) \\ &= \log 2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{2^2} - \cdots - \frac{1}{n}\frac{z^n}{2^n} - \cdots, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^2}\left[\log 2 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2.2^2} - \cdots - \frac{z^n}{n.2^n} - \cdots\right] \\ &= \frac{\log 2}{z^2} - \frac{1}{2z} - \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n+2)\,2^{n+2}} \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{-1}{2}$.

Exercice 6.6 *Soient f et g deux fonctions holomorphes en z_0 et $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. Supposons que g admette un zéro simple en z_0. Calculer* $\mathrm{Res}(h, z_0)$.

Solution : Posons

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}, \text{ pour } z \neq z_0 \text{ et } g_1(z_0) = g'(z_0) \neq 0,$$

$g'(z_0) \neq 0$, car z_0 est un zéro simple de g. Donc par le développement de Taylor on a

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)\, g_1(z)} = \frac{1}{z - z_0}\left(\frac{f(z_0)}{g_1(z_0)} + \left(\frac{f}{g_1}\right)'(z_0).(z - z_0) + \cdots\right),$$

d'où

$$\mathrm{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g_1(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Exercice 6.7 *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $\oint_C \frac{1}{z\log(1+z)}dz$, où C est le cercle centré en 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.

2. $\oint_C \frac{1}{z^6+1}dz$, où $C = \{z \in \mathbb{C} \ : 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 2, \ |\mathrm{Re}\, z| \leq 2\}$.

Solution :

1. On remarque que la fonction $f(z) = \frac{1}{z\log(1+z)}$ admet une seule singularité à l'intérieur de C qui est le point 0, et c'est un pôle double, en effet :

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log(1+z)} = 1 \neq 0,$$

donc

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z\log(1+z)}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)\log(1+z)-z}{(1+z)\log^2(1+z)}=\frac{1}{2},$$

en utilisant la règle de l'Hôpital. D'après le théorème des résidus on a

$$\oint_C \frac{1}{z\log(1+z)}dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=\pi i$$

2. La fonction $g=\frac{1}{z^6+1}$ admet des pôles simples qui sont les racines sixièmes de -1, mais seuls $z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=e^{i\frac{3\pi}{6}}$ et $z_3=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ sont à l'intérieur de C, et on a

$$\operatorname{Res}(g,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)}{z^6+1}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$\operatorname{Res}(g,z_2)=\lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_2)}{z^6+1}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{2}}$$

$$\operatorname{Res}(g,z_3)=\lim_{z\to z_3}\frac{(z-z_3)}{z^6+1}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{25\pi}{6}}$$

D'après le théorème des résidus on obtient

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}dz=\sum_{k=1}^{3}2\pi i\operatorname{Res}(f,z_k)=\frac{2}{3}\pi.$$

6.4.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 6.8 *Déterminer le developpement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.*

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3},\ z_0=1,\qquad (z-3)\sin\frac{1}{z+2},\ z_0=-2,\qquad \frac{z-\sin z}{z^3},\ z_0=0$$

Exercice 6.9 *Trouver les résidus en tout pôle des fonctions*

$$a)\ f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)},\ b) f(z)=\frac{e^z}{\sin^2 z}$$

Exercice 6.10 *Calculer l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz,$$

le long du cercle C d'équation $|z|=3$.

Chapitre 7

Applications du théorème des résidus

7.1 Lemmes préliminaires

Avant de donner quelques applications du théorème des résidus, on a besoin de certains lemmes préliminaires.

Pour $R > 0$, soit Γ_R le demi-cercle supérieur centré à l'origine de rayon R.

Proposition 7.1.1 *Soit f une fonction continue dans le demi plan* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *telle que*

$$\exists M > 0, \exists k > 1 : |f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \text{ pour } z = Re^{it},$$

alors

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

Preuve. D'après le théorème d'estimation, on a

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)|\, dz \leq \frac{M}{R^k} L_{\Gamma_R} = \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{M\pi}{R^{k-1}},$$

où pour rappel $L_{\Gamma_R} = \pi R$ est la longeur de Γ_R. D'où

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \lim_{R \to \infty} \frac{M\pi}{R^{k-1}} = 0,$$

car $k > 1$. Ainsi $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0$. □

Proposition 7.1.2 *Soit f une fonction continue dans le demi plan $\operatorname{Im} z \geq 0$ telle que*

$$\exists M > 0, \exists k > 0 : |f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \text{ pour } z = Re^{it},$$

alors

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Preuve. Comme l'arc Γ_R est paramétré par le chemin $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, alors

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = \int_0^\pi e^{i\alpha Re^{it}} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\right) dt,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| e^{i\alpha Re^{it}} f\left(Re^{it}\right)\left(iRe^{it}\right) \right| dt \\
&= \int_0^\pi \left| e^{i\alpha R \cos t} e^{-\alpha R \sin t} f\left(Re^{it}\right) \right| R dt \\
&= \int_0^\pi Re^{-\alpha R \sin t} \left| f\left(Re^{it}\right) \right| dt \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} dt \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-\alpha R \sin t} dt \\
&= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} dt
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a fait le changement de variable $s = \pi - t$ dans la deuxième intégrale.

Or d'après le théorème des accroissements finis on a

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

remplaçons alors dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz \right| &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2t}{\pi}} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \left[\frac{-\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi M}{\alpha R^k} \left(1 - e^{-\alpha R}\right) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } R \to \infty,
\end{aligned}$$

car α et k sont strictement positifs. □

Proposition 7.1.3 *Soit f une fonction continue dans le demi plan* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *telle que*

$$\lim_{R\to\infty} \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = 0,$$

alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Preuve. Elle est analogue à la preuve de la proposition précédente. □

7.2 Calcul de quelques intégrales réelles

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser le théorème des résidus et les propositions précédentes pour le calcul de certains types d'intégrales réelles généralisées.

7.2.1 Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

Théorème 7.2.1 *Soit f une fonction holomorphe dans le demi plan* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, \ldots, z_n$. Supposons que*

$$\exists M > 0, \exists k > 1 : |f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \text{ pour } z = Re^{it}, \text{ et } R \text{ assez grand,}$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Preuve. Considérons le contour fermé $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

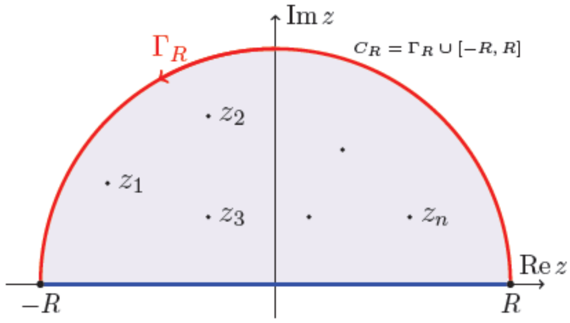


Figure 7.1

Choisissons R suffisamment grand tel que les singuliers isolés $z_1, \ldots, z_n$, soient à l'intérieur de C_R, alors d'après le théorème des résidus on a

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Comme $C_R = \Gamma_R \cup [-R, +R]$, alors cela veut dire

$$\int_{[-R,+R]} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Or

$$\int_{[-R,+R]} f(z)\, dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx.$$

D'autre part d'après la proposition 7.1.1,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0,$$

donc par passage à la limite quand $R \to +\infty$ et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

□

Cas particulier : Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$ et aucun des zéros de Q n'est réel, alors dans ce cas les z_k sont les zéros de Q, d'imaginaire strictement positif, et la formule précédente reste valable.

Exemple : Calculons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

On a $\deg (x^2+1)(x^2+4) = 2 + \deg x^2$, et les pôles de $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$, d'imaginaire strictement positif, sont $z = i$ et $z = 2i$ et ils sont simples, donc

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{i}{6}$$

$$\operatorname{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}=-\frac{i}{3}.$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\pi i\left(\frac{i}{6}-\frac{i}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

7.2.2 Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

Théorème 7.2.2 *Soit f une fonction holomorphe dans le demi plan* $\operatorname{Im} z\geq 0$ *sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1,\ldots,z_n$. Supposons que*

$$\exists M>0,\exists k>0:\left|f\left(Re^{it}\right)\right|\leq\frac{M}{R^k}\ \text{pour } R \text{ assez grand,}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx &= 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z},z_k\right),\ \ si\ \alpha>0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx &= -2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k<0}\operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z},z_k\right),\ \ si\ \alpha<0\end{aligned}$$

Preuve. Considérons le cas $\alpha>0$. Soit C_R la courbe fermée simple formée de Γ_R et du segment $[-R,+R]$, voir figure 7.1. Choisissons R suffisamment grand tel que les points singuliers isolés $z_1,\ldots,z_n$, soient à l'intérieur de C_R, alors d'après le théorème des résidus on a

$$\oint_{C_R}f(z)\,e^{i\alpha z}dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z},z_k\right),$$

or $C_R=\Gamma_R\cup[-R,+R]$, donc

$$\int_{[-R,+R]}f(z)\,e^{i\alpha z}dz+\int_{\Gamma_R}f(z)\,e^{i\alpha z}dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z},z_k\right).$$

Mais

$$\int_{[-R,+R]}f(z)\,e^{i\alpha z}dz=\int_{-R}^{+R}f(x)\,e^{i\alpha x}dx,$$

d'où

$$\int_{-R}^{+R}f(x)\,e^{i\alpha x}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z},z_k\right)-\int_{\Gamma_R}f(z)\,e^{i\alpha z}dz$$

D'autre part d'après la proposition 7.1.2,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,e^{i\alpha z}dz = 0,$$

donc par passage à la limite quand $R \to +\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{i\alpha z}, z_k\right).$$

Pour le cas $\alpha < 0$, on considère le contour formé du segment $[-R, R]$ et le demi-cercle inférieur opposé à Γ_R. Par la même procédure, on aboutit au résultat demandé. □

Application à la transformation de Fourier :

Définition 7.2.3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable, i.e.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

sa transformation de Fourier est la fonction notée $\widehat{f}$ *ou* $\mathcal{F}(f)$ *définie par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}dx,\ \xi \in \mathbb{R}$$

Proposition 7.2.4 *Soit* f *une fonction intégrable possédant un nombre fini de pôles* z_k, *avec* $\operatorname{Im} z_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, n,$ *alors*

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{-i\xi z}, z_k\right), & si\ \xi < 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k<0} \operatorname{Res}\left(f(z)\,e^{-i\xi z}, z_k\right), & si\ \xi > 0 \end{cases}$$

Preuve. Si f est intégrable, alors elle vérifie l'hypothèse de la propostion 7.1.3, donc

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,e^{-i\xi z}dz = 0,\ \text{pour } \xi < 0.$$

On retrouve alors le résultat du théorème précédent. □

Exemple : Calculons la transformation de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Comme $z^2+1=0$ pour $z=i$ et $z=-i$, alors ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^2+1}$ et on a

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{-i\xi z}|_{z=i}}{(z^2+1)'|_{z=i}} = \frac{e^{-i\xi z}|_{z=i}}{2z|_{z=i}} = \frac{e^{\xi}}{2i},$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right) = \frac{e^{-i\xi z}|_{z=-i}}{(z^2+1)'|_{z=-i}} = \frac{e^{-i\xi z}|_{z=-i}}{2z|_{z=-i}} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}.$$

D'où

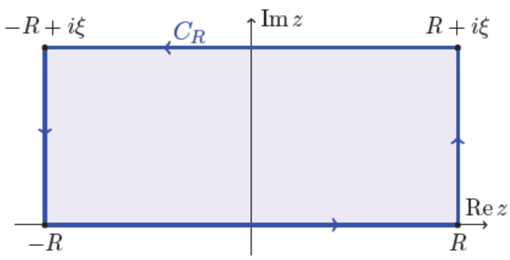
$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right), & \text{si } \xi < 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i\left(\frac{e^{\xi}}{2i}\right), & \text{si } \xi < 0 \\ -2\pi i\left(\frac{e^{-\xi}}{-2i},\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}$$

Remarque 7.2.5 *Parfois on peut calculer la transformation de Fourier d'une fonction en utilisant seulement le théorème de Cauchy.*

Exemple : Calculons la transformation de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Considérons $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ où C_R désigne le rectangle d'extrémité $-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$, $\xi > 0$.



La fonction $z \to e^{-\frac{z^2}{2}}$ n'a aucune singularité à l'intérieur de C_R, alors $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, i.e.

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy + \int_R^{-R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx + \int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} i dy = 0.$$

Or

$$\left|\int_0^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy\right| \leq \int_0^{\xi} \left|e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}}\right| dy = \int_0^{\xi} e^{\frac{-R^2+y^2}{2}} dy \to 0, \text{ quand } R \to \infty.$$

De même

$$\int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} idy \to 0, \text{ quand } R \to \infty.$$

Donc, par passage à la limite lorsque $R \to \infty$. on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0,$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Par conséquent

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

7.2.3 Intégrale du type $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$

Soit $R(\sin t, \cos t)$ une fonction rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$. Posons $z = e^{it}$, alors

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \ \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

d'où $R(\sin t, \cos t) = R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)$. Posons $f(z) = R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)$, on obtient

Théorème 7.2.6 *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_C \frac{f(z)}{iz} dz,$$

où C est le cercle unité $|z| = 1$.

En particulier si $\frac{f(z)}{z}$ a un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_n$ à l'intérieur de C, alors

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

Preuve. Le cercle unité est paramétré par $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, donc

$$\oint_C \frac{f(z)}{iz} dz = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{(ie^{it})}{ie^{it}} dt = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$$

Si la fonction $\frac{f(z)}{z}$ a un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_n$ à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors d'après le théorème des résidus, on a

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

$\square$

Exemple : Calculons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin t} dt.$$

On a d'après le théorème précédent

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz = \oint_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)} dz.$$

Puisque le nombre $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) = 2\pi i \frac{2}{3\left(-\frac{i}{3}+3i\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

7.2.4 Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx,\ \alpha > 0$

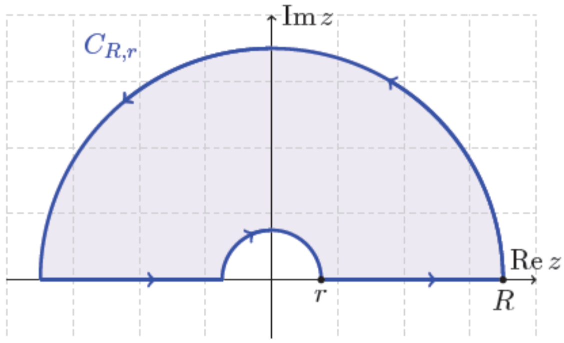
Théorème 7.2.7 *Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle telle que $\deg Q \geq \deg P$ et aucun des zéros de Q n'est réel. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k\right).$$

Preuve. Pour $0 < r < R$, considérons le contour

$$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup (-\Gamma_r),$$

où pour rappel $(-\Gamma_r)$ est le demi-cercle Γ_r décrit dans le sens inverse.



Choisissons R assez grand, et r assez petit tels que les zéros de Q d'imaginaire > 0, soient à l'intérieur de $C_{R,r}$. Donc d'après le théorème des résidus on obtient

$$\begin{aligned}\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{e^{i\alpha x}}{x}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{e^{i\alpha x}}{x}dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k\right).\end{aligned}$$

Comme $\deg Q \geq \deg P$, alors

$$\exists M > 0 : \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{1}{z}\right| \leq \frac{M}{R} \text{ pour } z = Re^{it}, \text{ et } R \text{ assez grand,}$$

donc d'après la proposition 7.1.2, on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz = 0$$

D'autre part

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz = \lim_{r\to 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})}\frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}}\left(ire^{it}\right)dt = \int_0^\pi i\frac{P(0)}{Q(0)} = i\pi\frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc par passage à la limite lorsque $R \to +\infty$ et $r \to 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{e^{i\alpha x}}{x}dx = i\pi\frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k\right).$$

□

Exemple : Calculons

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

Ici $P = Q = 1$, et comme $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{z}$ ne possède pas de pôles à l'intérieur de $C_{R,r}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} = i\pi.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2i \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ est impaire, et la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire, par conséquent

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

7.3 Exercices

7.3.1 Exercices résolus

Exercice 7.1 *Calculer l'intégrale suivante.*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

Solution : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ converge car

$$\frac{1}{x^6 + 1} \underset{\infty}{\backsim} \frac{1}{x^6} \text{ et } 6 > 1.$$

Soit

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^6 + 1},$$

avec $C = [-R, R] \cup \Gamma$, $R > 1$, où Γ est le demi-cercle supérieur centré en 0 et de rayon R.

Choisissons R assez grand tel que les trois pôles simples $e^{i\frac{\pi}{6}}, i, e^{i\frac{5\pi}{6}}$ de $f(z)$ soient à l'intérieur de C. D'aprés le théorème des résidus, on a

$$I = 2\pi i \left(\text{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{6}}\right) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}\left(f, e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)\right).$$

Calculons alors ces résidus.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{6}}\right) &= \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{6}}} \left(z - e^{\frac{i\pi}{6}}\right) \frac{1}{z^6+1} = -\frac{1}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{12} i \\
\operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{z^6+1} = \frac{-i}{6} \\
\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{i5\pi}{6}}\right) &= \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{6}}} \left(z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{12} i.
\end{aligned}$$

D'où

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{-5\pi}{6}}}{6} + \frac{-i}{6} + \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{6} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

D'autre part $\deg(z^6+1) = 6 \geq 2 + \deg(1) = 2$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = I = \frac{2\pi}{3}$$

Enfin puisque la fonction $\frac{1}{x^6+1}$ est paire, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 7.2 *Calculer la transformation de Fourier de la fonction*

$$g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Solution : La fonction g est intégrable puisque $\deg(1+x^2)^2 = 4 > 1$, donc par application de la formule donnant l'expression de la transformation de Fourier, on a

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2} e^{-i\xi z}, z_k\right), \text{ si } \xi < 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2} e^{-i\xi x z}, z_k\right), \text{ si } \xi > 0 \end{cases}$$

Les pôles de $\frac{e^{-i\xi z}}{(1+z^2)^2}$ sont i et $-i$, et ils sont doubles, donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2} e^{-i\xi z}, i\right) &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{e^{-i\xi z}}{(1+z^2)^2} \right) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-i\xi z}}{(i+z)^2} \right) \\
&= \lim_{z \to i} \left(\frac{-i\xi (i+z) - 2}{(i+z)^3} \right) e^{-i\xi z} = \frac{1}{4} i e^{\xi} (\xi - 1), \\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2} e^{-i\xi z}, -i\right) &= \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left((z+i)^2 \frac{e^{-i\xi z}}{(1+z^2)^2} \right) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-i\xi z}}{(z-i)^2} \right) \\
&= \lim_{z \to -i} \left(\frac{-i\xi (z-i) - 2}{(z-i)^3} \right) e^{-i\xi z} = \frac{1}{4} i e^{-\xi} (\xi + 1)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \frac{1}{4} i e^{\xi}(\xi-1) = -\frac{\pi}{2} e^{\xi}(\xi-1), \text{ si } \xi<0 \\ -2\pi i \frac{1}{4} i e^{-\xi}(\xi+1) = \frac{\pi}{2} e^{-\xi}(\xi+1), \text{ si } \xi>0 \end{cases}$$
$$= \frac{\pi}{2}(1+|\xi|)e^{-|\xi|}.$$

Exercice 7.3 *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx$$

Solution : Soit

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2},$$

elle a deux pôles simples $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -1-i$, ce dernier est rejeté car son imaginaire est négatif. On a donc

$$\operatorname{Res}(f,-1+i) = \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)f(z) = \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{e^{iz}}{z^2+2z+2} = \frac{e^{-1-i}}{2i}.$$

De plus il existe $M>0$, tel que

$$\left|\frac{1}{z^2+2z+2}\right| \leq \frac{M}{R^2} \text{ pour } z = Re^{it} \text{ et } R \text{ assez grand,}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f,-1+i) = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi e^{-1-i} = \pi e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)$$

Par conséquent

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx = -\pi e^{-1} \sin 1,$$
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} dx = \pi e^{-1} \cos 1.$$

Exercice 7.4 *Montrer par le calcul des résidus que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta} d\theta = 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right), \ a>1.$$

Solution : Si on pose $z = e^{i\theta}$, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z-z^{-1}}{2i}}{a+\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z\left(z^2+2iaz-1\right)} dz$$

La fonction $\frac{z^2-1}{z(z^2+2iaz-1)}$ a trois pôles simples $0, i\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)$ et $i\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)$, ce dernier n'est pas à l'intérieur du cercle $|z|=1$. D'après le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta} d\theta &= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{z\left(z^2+2iaz-1\right)}, 0\right) \\
&\quad + 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{z\left(z^2+2iaz-1\right)}, i\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right), \\
&= 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 7.5 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \ \ m > 0$$

Solution : On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1},$$

cette fonction a deux pôles $z = i$ et $z = -i$, ce dernier est rejeté puisque son imaginaire est négatif, et on a

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{imz}}{z^2+1} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

D'autre part il est clair que

$$\left|\frac{1}{\left(\mathrm{R}e^{i\theta}\right)^2+1}\right| \sim \frac{1}{R^2}, \text{ pour } R \text{ assez grand,}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m}.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x^2+1} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx,$$

car $\frac{\cos mx}{x^2+1}$ est une fonction paire, et $\frac{\sin mx}{x^2+1}$ est une fonction impaire, ce qui implique

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

Exercice 7.6 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i}.$$

En déduire les valeurs

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+2)\,dx}{x^4+8x^2-16x+20}, \\ \text{et } I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4-2x)\,dx}{x^4+8x^2-16x+20}. \end{aligned}$$

Solution : 1. Posons $f(z) = \frac{1}{z^2+2iz+2-4i}$. Les pôles de f sont simples à savoir $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1-3i$, mais z_2 est à rejeter car $\operatorname{Im} z_2 < 0$. Comme $\deg(z^2+2iz+2-4i) = 2 \geq 2 + \deg(1)$, alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i),$$

or

$$\operatorname{Res}(f, 1+i) = \lim_{z\to 1+i} (z-1-i) f(z) = \lim_{z\to 1+i} (z-1-i) \frac{1}{z^2+2iz+2-4i} = \frac{1}{2+4i},$$

d'où

$$I = 2\pi i . \frac{1}{2+4i} = \frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}.$$

2. Remarquons que

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2ix+2-4i} = \frac{x^2+2-i(2x-4)}{(x^2+2)^2+(2x-4)^2} = \frac{(x^2+2)-i(2x-4)}{x^4+8x^2-16x+20},$$

on en déduit alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+2)}{x^4+8x^2-16x+20} &= \frac{2\pi}{5}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4-2x)}{x^4+8x^2-16x+20} &= \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 7.7 *Evaluer l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}.$$

Solution : Posant $z = e^{i\theta}$, on a alors

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, dz = izd\theta.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{3 - 2\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)\, z^2 + 6iz - 1 - 2i} \end{aligned}$$

On remarque que la fonction $z \to \frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$ admet deux pôles simples : $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = \frac{2-i}{5}$, mais z_1 n'est pas à l'intérieur de C, donc d'après le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} &= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{2}{(1-2i)\, z^2 + 6iz - 1 - 2i}, \frac{2-i}{5}\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \to \frac{2-i}{5}} \left(z - \frac{2-i}{5}\right) . \frac{2}{(1-2i)\, z^2 + 6iz - 1 - 2i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2i}\right) = \pi \end{aligned}$$

Exercice 7.8 *Démontrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2.$$

Solution : On considère la fonction

$$z \to \frac{\log(z^2+1)}{z^2+1},$$

on remarque que cette fonction admet deux pôles simples $z_1 = i, z_2 = -i$, on a aussi

$$\log\left(z^2+1\right) = \log(z+i)(z-i) = \log(z+i) + \log(z-i).$$

On considère le premier terme i.e. la fonction

$$f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+1},$$

Puisque $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\frac{3}{2}} \left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| = 0$, alors

$$\exists M > 0 : \left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{M}{R^{\frac{3}{2}}} \text{ pour } R \text{ assez grand}$$

Ainsi et d'après le théorème des résidus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx &= 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log(z+i)}{z^2+1} \\
&= \pi \log(2i) = \pi\left(\log 2 + i\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2}.$$

Par changement de variables dans la première intégrale, on trouve

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log(i-x)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2},$$

c'est-à-dire

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log(-1)(x-i)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2},$$

ou encore

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{i\pi}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x-i)}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2},$$

ce qui donne

$$\left. i\pi \arctan x \right]_0^{\infty} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2},$$

par conséquent

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2} - i\pi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \log 2.$$

7.3.2 Exercices supplémentaires proposés

Exercice 7.9 *Montrer par le calcul des résidus que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^n} dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}}, \ n > 2.$$

Exercice 7.10 *Montrer que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2 \left(x^2+2x+2\right)} dx = \frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 7.11 *Montrer que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

Exercice 7.12 *Evaluer par le calcul des résidus*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c\sin\theta}, \ a^2 > b^2 + c^2.$$

Exercice 7.13 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Bibliographie

[1] Belaidi B., Cours d'analyse complexe, univ-Mostaganem, 1994.

[2] Cartan H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 6ième édition, 1985.

[3] Chabat B., Introduction à l'analyse complexe. Tome 1, Fonctions d'une variable, Editions Mir, 1990.

[4] Laaladj T., Notes de Cours du module "Analyse Complexe", USTHB Bab Ezzouar Alger, 2016.

[5] Murray R. S., Variables complexes : cours et problèmes, volume 12 de Série Schaum, Groupe McGraw-Hill, 1976.

[6] Rudin W., Analyse réelle et complexe, Dunod, Paris, 1998.

[7] Sikorav J-C, Analyse complexe, Cours de L3, ENS Lyon, 2014.